Численная идентификация граничных условий в модели реакции-диффузии

Д.В. Галушкина
Ульяновский государственный университет
Ульяновск, Россия
smallcranberry@gmail.com

А.Н. Кувшинова
Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова
Ульяновск, Россия
kuvanulspu@yandex.ru

Ю.В. Цыганова
Ульяновский государственный университет
Ульяновск, Россия
tsyganovajv@gmail.com

***Аннотация*—В статье рассматривается задача численной идентификации граничных условий модели реакции-диффузии по данным зашумленных измерений значений искомой функции. Для решения поставленной задачи осуществляется переход от исходной непрерывной модели с уравнением в частных производных к дискретной линейной стохастической системе в пространстве состояний, в которой функции, входящие в граничные условия, представлены в виде неизвестного вектора входных воздействий. К полученной системе применяется рекуррентный алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий Гиллейнса – Де-Мора. Приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающие практическую применимость предложенного подхода.**

Ключевые слова—модель реакции-диффузии, дискретные стохастические системы, алгоритмы рекуррентного оценивания

1. Введение

Задачи идентификации параметров математических моделей тепломассопереноса возникают при исследовании физических, химических, биологических и других природных и техногенных процессов. Такие задачи относятся к классу обратных задач, интерес к которым в последнее время заметно вырос. Среди различных типов обратных задач можно выделить граничные обратные задачи, связанные с определением поведения искомой функции на границе области.

Рассмотрим одномерную модель реакции-диффузии, описываемую уравнением (1) с начальным условием (2) и граничными условиями третьего рода (3):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \beta c, \tag{1}$$

$$c(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c(a,t)}{\partial x} = \lambda[c(a,t) - f(t)], \\ \dfrac{\partial c(b,t)}{\partial x} = -\lambda[c(b,t) - g(t)], \end{cases} \tag{3}$$

$$x \in [a,b], t \in [0,T],$$

где $c(x,t)$ – искомая функция, x – пространственная координата, t – время, α – коэффициент диффузии, β – коэффициент реакции, $\varphi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, a и b – границы рассматриваемой области (отрезка).

Рассмотрим задачу определения значений функций $f(t)$ и $g(t)$, входящих в граничные условия (3), по результатам зашумленных измерений значений функции $c(x,t)$ в отдельных точках рассматриваемого отрезка в последовательные моменты времени.

Одним из актуальных методов решения граничных обратных задач являются методы параметрической идентификации, основанные на применении рекуррентных алгоритмов дискретной фильтрации [1], [2]. В работах [3] и [4] для идентификации граничных условий модели конвективно-диффузионного переноса было предложено использовать алгоритм Гиллейнса – Де-Мора [5], предназначенный для одновременного оценивания векторов состояния и неизвестных входных воздействий дискретной линейной стохастической системы. Применим данный подход для идентификации граничных условий модели (1)–(3).

2. Дискретная линейная стохастическая модель

Для решения поставленной задачи перейдем от непрерывной модели (1)–(3) к дискретной линейной стохастической системе в пространстве состояний:

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1} c_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1}, \\ z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, \ldots K, \end{cases}$$

где c_k – вектор состояния, u_k – вектор входных воздействий, z_k – вектор измерений, ξ_k – шум в измерителе (нормально распределенная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R_k > 0$). В данной системе первое уравнение называется уравнением объекта, а второе – уравнением измерений.

Зададим в области $[a,b]\times[0,T]$ регулярную сетку $\{(x_i,t_k) \mid i=0,1,\ldots,N,\ k=0,1,\ldots,K\}$ с пространственным шагом Δx и временным шагом Δt. Обозначим $c_i^k=c(x_i,t_k)$, $\varphi_i=\varphi(x_i)$, $f^k=f(t_k)$, $g^k=g(t_k)$ и заменим частные производные в уравнении (1) и граничных условиях (3) их конечно-разностными аналогами, тогда уравнение объекта может быть записано следующим образом:

$$\begin{bmatrix} c_0^k \\ c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \\ c_N^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{k-1} \\ c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \\ c_N^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^k \\ g^k \end{bmatrix},$$

где

$$a_1 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}, a_2 = 1 - \beta \Delta t - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}, a_3 = \frac{1}{1 + \lambda \Delta x}, a_4 = \frac{\lambda \Delta x}{1 + \lambda \Delta x}.$$

В полученном уравнении объекта функции $f(t)$ и $g(t)$ входят в неизвестный вектор входных воздействий.

К уравнению объекта добавим уравнение зашумленных измерений

$$z_k = H_k c_k + \xi_k,\ k=1,\ldots,K.$$

3. Пример

Пусть требуется идентифицировать граничные условия на левом и правом концах отрезка следующей модели:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - 2c,$$

$$c(x,0) = 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c(0,t)}{\partial x} = c(0,t) - t|\sin 4t|, \\ \dfrac{\partial c(1,t)}{\partial x} = -\left[c(1,t) - \dfrac{t}{4}\right], \end{cases}$$

$$x \in [0,1], t \in [0,2].$$

Процесс идентификации граничных условий будем моделировать в системе MATLAB. Зададим в области [0;1]×[0;2] плоскости *Oxt* пространственно-временную сетку с 6 узлами по оси *Ox* и 201 узлом по оси *Ot* (*Δx=0.2, Δt=0,01*). Решение рассматриваемой задачи получим методом конечных разностей. Вектор состояния дискретной модели будет состоять из 6 узлов. Смоделируем зашумленные измерения с дисперсией шума R=0.02^2. Матрицу измерений зададим в виде

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1 и 2 приведены графики решения задачи и смоделированных зашумленных измерений, а на рис. 3 и 4 – графики оценок левого и правого граничных условий соответственно.

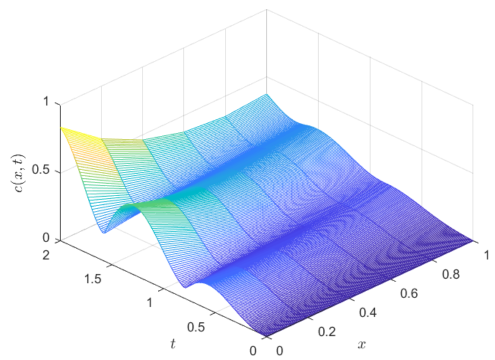

Рис. 1. График решения

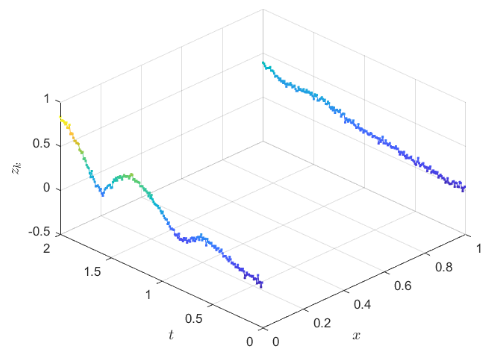

Рис. 2. График зашумленных измерений

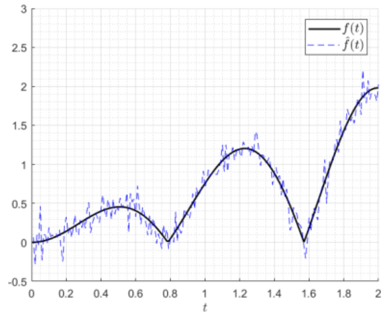

Рис. 3. Графики функции *f(t)* и ее оценки

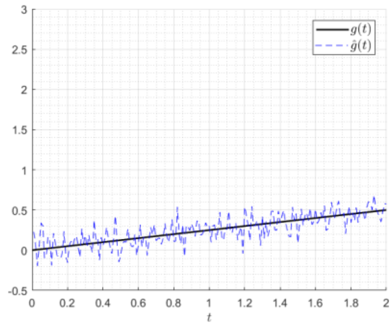

Рис. 4. Графики функции *g(t)* и ее оценки

4. Заключение

В работе рассмотрена задача идентификации граничных условий одномерного уравнения реакции-диффузии с граничными условиями третьего рода по данным зашумленных измерений. Для решения задачи предлагается использовать рекуррентный алгоритм Гиллейнса – Де-Мора для одновременного оценивания векторов состояния и неизвестных входных воздействий дискретной линейной стохастической системы в пространстве состояний. Результаты моделирования показывают работоспособность предложенного подхода.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00361, https://rscf.ru/project/23-21-00361/.

Литература

[1] Пилипенко, Н.В. Применение фильтра Калмана в нестационарной теплометрии. Учебное пособие / Н.В. Пилипенко. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 36 с.

[2] Копытин, А. В. Применение расширенного фильтра Калмана для идентификации параметров распределенной динамической системы / А.В. Копытин, Е.А. Копытина, М.Г. Матвеев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — Т. 3. — С. 44–50.

[3] Цыганов, А. В. Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова // Сборник трудов V международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019). – 2019. — Т. 3. — С. 169–177.

[4] Кувшинова, А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений / А. Н. Кувшинова // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2019. — Т. 21, № 4. — С. 469–479. — DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.469-479

[5] Gillijns, S. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems / S. Gillijns, B. D. Moor // Automatica. — 2007. — Vol. 43. — P. 111–116.