Быстрые нелинейные вейвлет-подобные преобразования

В.Г. Лабунец[1], В.П. Часовских[1], Н. Остхеймер[2]

[1] *Уральский государственный лесотехнический университет, Сибирский тракт 37, Екатеринбург, Россия, 620100*
[2] *Capricat LLC, Попано Бич, Флорида, США*

Аннотация
Впервые вводится широкий класс нелинейных вейвлет-преобразований (НВП). Внутри него строится подкласс НВП со структурой быстрого алгоритма. Каждое быстрое преобразование из этого класса представляется в виде параллельно-последовательной суперпозиции нелинейных (2x2)-преобразований.

Ключевые слова
Быстрые алгоритмы, вейвлет-преобразования, нелинейные преобразования

1. Введение

Нелинейная обработка сигналов – одно из направлений цифровой обработки сигналов и изображений, дальнейшее развитие которого сдерживается отсутствием быстрых алгоритмов для таких преобразований. В предыдущей статье [1-5] мы представили унифицированный подход к алгоритмам быстрых нелинейных преобразований, основанный на вновь введенной тензорной суперпозиции нелинейных произведений, подобный БПФ, БПУ. БПХ. В данной работе мы предлагаем широкий класс быстрых нелинейных вейвлет-преобразований (НВП).

Произвольное нелинейное 2^n-мерное преобразование характеризуется N нелинейными скалярными функциями $\left\{f_k\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\right\}_{k=0}^{2^n-1}$. Они формируют нелинейное преобразование

$$\left|\mathbf{y}\right\rangle=\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{bmatrix}=\mathbf{NLWT}\circ\left|\mathbf{x}\right\rangle=\begin{bmatrix} f_0\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\\ f_1\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\\ \vdots\\ f_{N-1}\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}x_0\\ \hline {}_{1\leftarrow}x_1\\ \hline \vdots\\ \hline {}_{N-1\leftarrow}x_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0\left(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\right)\\ f_1\left(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\right)\\ \vdots\\ f_{N-1}\left(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\right)\end{bmatrix} \tag{1}$$

2^n-мерного вектор-столбца $\left|\mathbf{x}\right\rangle$ в другой 2^n-мерный вектор-столбец $\left|\mathbf{y}\right\rangle$.

Пусть $\left\{h_k^r\underbrace{(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)}_{2D}\right\}_{k=0}^{2^r-1},\left\{g_k^r\underbrace{(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)}_{2D}\right\}_{k=0}^{2^r-1},\forall r\in\left\{m,m+1,\ldots,n-1\right\}$ - два набора нелинейных функций, где $m=\left]\log_2 2D\right[$ - такое наименьшее целое число, что $2^{m-1}\le 2D\le 2^m$. Построим ортогональное циклическое вейвлет преобразование (НВП). Для этого введем в рассмотрение нелинейные атомарные вейвлет-преобразования лестничного типа;

$$\mathbf{NAWT}_{2^{r+1}}\left[\left\{h_k\underbrace{(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)}_{2D}\right\}_{k=0}^{2^r-1},\left\{g_k\underbrace{(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)}_{2D}\right\}_{k=0}^{2^r-1}\right]=\begin{bmatrix} h_0(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{2D-1})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots h_1(\cdot_2,\cdot_3,\ldots,\cdot_{2D+1})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots h_2(\cdot_4,\cdot_5,\ldots,\cdot_{2D+3})\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{2D-3})\ldots h_{2^r-1}(\cdot_{2^{r+1}-2},\cdot_{2^{r+1}-1},\\ \hline g_0(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{2D-1})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots g_1(\cdot_2,\cdot_3,\ldots,\cdot_{2D+1})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots g_2(\cdot_4,\cdot_5,\ldots,\cdot_{2D+3})\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{2D-3})\ldots h_{2^r-1}(\cdot_{2^{r+1}-2},\cdot_{2^{r+1}-1},\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}x_0\\ {}_{0\leftarrow}x_1\\ \ldots\\ {}_{0\leftarrow}x_{2^r-1}\\ \hline {}_{0\leftarrow}x_{2^r}\\ {}_{0\leftarrow}x_{2^r+1}\\ \ldots\\ {}_{0\leftarrow}x_{2^{r+1}-1}\end{bmatrix}, \tag{2}$$

суперпозиционное произведение которых определяет нелинейное вейвлет-преобразование:

$$\mathbf{NWT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]=\prod_{r=m}^{\overrightarrow{n-1}}\circ\left[\mathbf{NAWT}_{2^{r+1}}\left[\left\{h_k^r\underbrace{(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)}_{2D}\right\}_{k=0}^{2^r-1},\left\{g_k^r\underbrace{(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)}_{2D}\right\}_{k=0}^{2^r-1}\right]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{r+1}}\right]. \tag{3}$$

Далее вводимая специальная форма нелинейные атомарные вейвлет-преобразования лестничного типа (2) порождает нелинейные вейвлет-преобразования с быстрым алгоритмом.

2. Быстрые нелинейные вейвлет-преобразования

Пусть $\mathbf{V}_N$ -суть N-D пространство, натянутое на базис $\{e_0, e_1, ..., e_{N-1}\}$: $\mathbf{V}_N = \mathbf{V}_N\{e_0, e_1, ..., e_{N-1}\} = \ = \mathbf{Span}\{e_0, e_1, \dots e_{N-1}\}$ Мы полагаем, что $N = 2^n$. Разобьем пространство $\mathbf{V}_N$ на $M = 2^{n-1}$ 2-D подпространств $\mathbf{V}_N = \mathbf{V}_2^0\left\{e_{i_0^0}, e_{i_1^0}\right\} \oplus \mathbf{V}_2^1\left\{e_{i_0^1}, e_{i_1^1}\right\} \oplus ... \oplus \mathbf{V}_2^{M-1}\left\{e_{i_0^{M-1}}, e_{i_1^{M-1}}\right\}$. В каждом из них введем базовые (2×2)-преобразования типа: $\mathbf{BT}_2 = \left[i_0, i_1 \,|\, \mathbf{BT}_2 \,|\, i_0, i_1\right] = \begin{bmatrix} {}_{i_0 \leftarrow} g_0(i_0, i_1) \\ {}_{i_1 \leftarrow} g_1(i_0, i_1) \end{bmatrix}$: $\mathbf{V}_2\{e_{i_0}, e_{i_1}\} \to \mathbf{V}_2\{e_{i_0}, e_{i_1}\}$, действующие следующим образом

$$\begin{bmatrix} y_{i_0} \\ y_{i_1} \end{bmatrix} = \mathbf{BT}_2 \circ \begin{bmatrix} x_{i_0} \\ x_{i_1} \end{bmatrix} = \left[i_0, i_1 \,|\, \mathbf{BT}_2 \,|\, i_0, i_1\right] \circ \begin{bmatrix} x_{i_0} \\ x_{i_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{i_0 \leftarrow} g_0(\cdot_{i_0}, \cdot_{i_1}) \\ {}_{i_1 \leftarrow} g_1(\cdot_{i_0}, \cdot_{i_1}) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_{i_0} \\ x_{i_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{i_0 \leftarrow} g(x_{i_0}, x_{i_1}) \\ {}_{i_1 \leftarrow} g(x_{i_0}, x_{i_1}) \end{bmatrix}.$$

Мы используем специальное семейство $\left\{\begin{bmatrix} {}_{i_0^p \leftarrow} g_0^p(\cdot_{i_0^p}, \cdot_{i_1^p}) \\ {}_{i_1^p \leftarrow} g_1^p(\cdot_{i_0^p}, \cdot_{i_1^p}) \end{bmatrix}\right\}_{p=0}^{S_r}$ из $S_r = M_r - 1 = 2^r - 1$ базовых преобразований для формирования новых преобразований в целом пространстве $\mathbf{V}_N$ следующего вида (аналог слабо заполненных матриц в линейном случае):

$${}^l\mathbf{SNLT}_{2^{r+1}} = \bigoplus_{k=0}^{2^r-1} \begin{bmatrix} {}_{l \underset{2^r}{\oplus} k \leftarrow} {}^l g^k(\cdot_{l \underset{2^r}{\oplus} k}, \cdot_{2^r+k}) \\ {}_{2^r+k \leftarrow} {}^l h^k(\cdot_{l \underset{2^r}{\oplus} k}, \cdot_{2^r+k}) \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение нелинейные атомарные вейвлет-преобразования (2) в виде следующего суперпозиционного произведения

$$\mathbf{NAWT}_{2^{r+1}} = \prod_{l=0}^{\overrightarrow{D-1}} \circ\, {}^l\mathbf{SNLT}_{2^{r+1}} = \prod_{l=0}^{\overrightarrow{D-1}} \circ \left[\bigoplus_{k=0}^{2^r-1} \begin{bmatrix} {}_{l \underset{2^r}{\oplus} k \leftarrow} {}^l g^k(\cdot_{l \underset{2^r}{\oplus} k}, \cdot_{2^r+k}) \\ {}_{2^r+k \leftarrow} {}^l h^k(\cdot_{l \underset{2^r}{\oplus} k}, \cdot_{2^r+k}) \end{bmatrix}\right]. \tag{4}$$

Согласно (3) строим нелинейное вейвлет-преобразование:

$$\mathbf{NWT}_{2^n} = \prod_{r=1}^{n-]\log_2 2D[+1} \circ \prod_{l=0}^{\overrightarrow{D-1}} \circ \left[{}^l\mathbf{SNLT}_{2^{r+1}} \oplus \mathbf{I}_{2^n - 2^{r+1}}\right] =$$
$$= \prod_{r=1}^{n-]\log_2 2D[+1} \circ \prod_{l=0}^{\overrightarrow{D-1}} \circ \left[\left[\bigoplus_{k=0}^{2^r-1} \begin{bmatrix} {}_{l \underset{2^r}{\oplus} k \leftarrow} {}^l g^k(\cdot_{l \underset{2^r}{\oplus} k}, \cdot_{2^r+k}) \\ {}_{2^r+k \leftarrow} {}^l h^k(\cdot_{l \underset{2^r}{\oplus} k}, \cdot_{2^r+k}) \end{bmatrix}\right] \oplus \mathbf{I}_{2^n - 2^{r+1}}\right]. \tag{5}$$

Эти преобразования являются обратимыми, если обратимы базовые преобразования $\mathbf{BT}_2$ [2].

3. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержки гранта РФФИ № 19-29-09022\19.

4. Литература

[1] Лабунец, В.Г. Быстрые нелинейные Фурье-подобные преобразования / В.П. Часовских, В.Г. Лабунец, Н. Остхеймер // Сборник трудов ИТНТ. – 2021.
[2] Labunets, V. New networks for nonlinear, linear and orthogonal transforms / E. Labunets // V-th Int. Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays (PARCELLA'90). – 1990. – P. 239-244.