Быстрые нелинейные Фурье-подобные преобразования

В.Г. Лабунец[1], В.П. Часовских[1], Н. Остхеймер[2]

[1]*Уральский государственный лесотехнический университет, Сибирский тракт 37, Екатеринбург, Россия, 620100*
[2]*Capricat LLC, Попано Бич, Флорида, США*

Аннотация

Впервые вводится понятие тензорной суперпозиции нелинейных преобразований. Доказывается, что *n*-кратная тензорная суперпозиция of *n* нелинейных (2x2)-преобразований может быть представлена в виде обычной суперпозиции слабо заполненных преобразований, которая представляет собой быстрый алгоритм нелинейного преобразования, подобного БПФ.

Ключевые слова

Быстрые алгоритмы, нелинейные преобразования

1. Введение

Нелинейная обработка сигналов – одно из направлений цифровой обработки сигналов и изображений, дальнейшее развитие которого сдерживается отсутствием быстрых алгоритмов для таких преобразований [1-4]. В этой статье мы представляем унифицированный подход к алгоритмам быстрых нелинейных преобразований, основанный на вновь введенной тензорной суперпозиции нелинейных произведений. Произвольное нелинейное N-мерное преобразование характеризуется N нелинейными функциями $\left\{f_k\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\right\}_{k=0}^{N-1}$. Они формируют нелинейное преобразование N-мерного вектор-столбца $|\mathbf{x}\rangle$ в другой N-мерный вектор-столбец $|\mathbf{y}\rangle$:

$$|\mathbf{y}\rangle=\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{bmatrix}=\mathbf{NLT}\circ|\mathbf{x}\rangle=\begin{bmatrix} f_0\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\\ f_1\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\\ \vdots\\ f_{N-1}\left(\cdot_0,\cdot_1,\ldots,\cdot_{N-1}\right)\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} \underline{\quad {}_{0\leftarrow}x_0}\\ \underline{\quad {}_{1\leftarrow}x_1}\\ \underline{\quad\quad\vdots}\\ {}_{N-1\leftarrow}x_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0\left(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\right)\\ f_1\left(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\right)\\ \vdots\\ f_{N-1}\left(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}\right)\end{bmatrix}, \tag{1}$$

В 1957 А.Н. Колмогоров [51] решил 13-ю проблему Гильберта. Он доказал, что любую совокупность нелинейных функций можно представить в виде суперпозиции функций от одной переменной. В данной работе вводится новый класс нелинейных преобразований типа $\mathbf{NLT}:|\mathbf{x}\rangle\rightarrow|\mathbf{y}\rangle$, каждое из которых обладает БПФ-подобным быстрым алгоритмом.

2. Тензорная суперпозиция

Пусть заданы два базовых нелинейных (2×2)-преобразования: $\mathbf{BT}_1:\mathbf{V}_2\rightarrow\mathbf{V}_2$, $\mathbf{BT}_2:\mathbf{V}_2\rightarrow\mathbf{V}_2$. Каждое из них характеризуется двумя нелинейными функциями $\mathbf{BT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]$, $\mathbf{BT}_2^2\left[g_0^2,g_1^2\right]$. Эти преобразования запишем в матрично-подобной форме (1):

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\end{bmatrix}=\mathbf{BT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]\circ\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}g_0^1(\cdot_0,\ \cdot_1)\\ {}_{1\leftarrow}g_1^1(\cdot_0,\ \cdot_1)\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}g_0^1(x_0,x_1)\\ {}_{1\leftarrow}g_1^1(x_0,x_1)\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\end{bmatrix}=\mathbf{BT}_2^2\left[g_0^2,g_1^2\right]\circ\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}g_0^2(\cdot_0,\ \cdot_1)\\ {}_{1\leftarrow}g_1^2(\cdot_0,\ \cdot_1)\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}g_0^2(x_0,x_1)\\ {}_{1\leftarrow}g_1^1(x_0,x_1)\end{bmatrix}.$$

Определение 1. Тензорное произведение двух нелинейных (2×2)-преобразований $\mathbf{BT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]$ и $\mathbf{BT}_2^2\left[g_0^2,g_1^2\right]$ является нелинейным (4×4)-преобразованием, которое определяется следующим образом

$$\mathbf{BT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]\otimes\mathbf{BT}_2^2\left[g_0^2,g_1^2\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}g_0^1(\cdot_0,\ \cdot_1) \\ \hdashline {}_{1\leftarrow}g_1^1(\cdot_0,\ \cdot_1)\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} {}_{0\leftarrow}g_0^2(\cdot_0,\ \cdot_1) \\ \hdashline {}_{1\leftarrow}g_1^2(\cdot_0,\ \cdot_1)\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} {}_{00\leftarrow}g_0^1\left(g_0^2(\cdot_{00},\ \cdot_{01}),g_0^2(\cdot_{10},\ \cdot_{11})\right) \\ \hdashline {}_{01\leftarrow}g_0^1\left(g_1^2(\cdot_{00},\ \cdot_{01}),g_1^2(\cdot_{10},\ \cdot_{11})\right) \\ \hdashline {}_{10\leftarrow}g_1^1\left(g_0^2(\cdot_{00},\ \cdot_{01}),g_0^2(\cdot_{10},\ \cdot_{11})\right) \\ \hdashline {}_{11\leftarrow}g_1^1\left(g_1^2(\cdot_{00},\ \cdot_{01}),g_1^2(\cdot_{10},\ \cdot_{11})\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}_{00\leftarrow}g_0^1\left(g_0^2,g_0^2\right) \\ \hdashline {}_{01\leftarrow}g_0^1\left(g_1^2,g_1^2\right) \\ \hline {}_{10\leftarrow}g_1^1\left(g_0^2,g_0^2\right) \\ \hdashline {}_{11\leftarrow}g_1^1\left(g_1^2,g_1^2\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}_{00\leftarrow}g_0^1\overleftarrow{\bullet}g_0^2 \\ \hdashline {}_{01\leftarrow}g_0^1\overleftarrow{\bullet}g_1^2 \\ \hline {}_{10\leftarrow}g_1^1\overleftarrow{\bullet}g_0^2 \\ \hdashline {}_{11\leftarrow}g_1^1\overleftarrow{\bullet}g_1^2\end{bmatrix},$$

где $g_0^1\overleftarrow{\bullet}g_0^2:=g_0^1\left(g_0^2,g_0^2\right)$, $g_0^1\overleftarrow{\bullet}g_1^2:=g_0^1\left(g_1^2,g_1^2\right)$, $g_1^1\overleftarrow{\bullet}g_0^2:=g_1^1\left(g_0^2,g_0^2\right)$, $g_1^1\overleftarrow{\bullet}g_1^2:=g_1^1\left(g_1^2,g_1^2\right)$ и $\overleftarrow{\bullet}$ -суть символ левой суперпозиции. So,

Определение 2. Многократная (n-кратная) тензорная суперпозиция n нелинейных $\left\{\mathbf{BT}_1^p\left[g_0^p,g_1^p\right]\right\}_{p=1}^n$ определяется как следующее нелинейное $(2^n\times 2^n)$-преобразование

$$\mathbf{NLT}_{2^n}\left[\left\{g_{i_1}^1\overleftarrow{\bullet}g_{i_2}^2\overleftarrow{\bullet}\ldots\overleftarrow{\bullet}g_{i_n}^n\right\}_{i_1=0,\ i_2=0,\ \ldots,\ i_n=0}^{i_1=1,\ i_2=1,\ \ldots,\ i_n=1}\right]:=\mathbf{BT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]\overleftarrow{\otimes}\ldots\overleftarrow{\otimes}\mathbf{BT}_2^n\left[g_0^n,g_1^n\right].$$

Теорема 1. Каждая n-кратная тензорная суперпозиция of n нелинейных преобразований $\left\{\mathbf{BT}_2^p\left[g_0^p,g_1^p\right]\right\}_{p=1}^n$ является $\circ$–суперпозицией слабо заполненных нелинейных преобразований (SNLT): $\mathbf{NLT}_{2^n}\left[\left\{g_{i_1}^1\overleftarrow{\bullet}g_{i_2}^2\overleftarrow{\bullet}\ldots\overleftarrow{\bullet}g_{i_n}^n\right\}_{i_1=0,\ i_2=0,\ldots,i_n=0}^{i_1=1,\ i_2=1,\ldots,\ i_n=1}\right]=\mathbf{BT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]\overleftarrow{\otimes}\mathbf{BT}_2^2\left[g_0^2,g_1^2\right]\overleftarrow{\otimes}\ldots\overleftarrow{\otimes}\mathbf{BT}_2^n\left[g_0^n,g_1^n\right]=$

$$=\mathbf{SNLT}_2^n\left[g_0^n,g_1^n\right]\circ\mathbf{SNLT}_2^2\left[g_0^2,g_1^2\right]\circ\ldots\circ\mathbf{SNLT}_2^1\left[g_0^1,g_1^1\right]=$$

$$=\prod_{r=1}^{n\leftarrow 1}\circ\left(\mathbf{I}_{2^{r-1}\times 2^{r-1}}\overleftarrow{\otimes}\mathbf{BT}_2^r\left[g_0^r,g_1^r\right]\overleftarrow{\otimes}\mathbf{I}_{2^{n-r}\times 2^{n-r}}\right)=\prod_{r=1}^{n\leftarrow 1}\circ\mathbf{SNLT}_2^r\left[g_0^r,g_1^r\right],$$

где $\prod_{r=1}^{n\leftarrow 1}\circ$ - суть символ последовательной суперпозиции (начиная с правой стороны и идее к левой стороне произведения-суперпозиции).

Последнее выражение представляет собой выражения для быстрого нелинейного преобразования $\mathbf{NLT}_{2^n}\left[\left\{g_{i_1}^1\overleftarrow{\bullet}g_{i_2}^2\overleftarrow{\bullet}\ldots\overleftarrow{\bullet}g_{i_n}^n\right\}_{i_1=0,\ i_2=0,\ldots,i_n=0}^{i_1=1,\ i_2=1,\ldots,\ i_n=1}\right]$ по основанию 2.

3. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержки гранта РФФИ № 19-29-09022\19.

4. Литература

[1] Rugh, W.J. Nonlinear system theory: the Volterra – Wiener approach / W.J. Rugh. – New York: The Johns Hopkins University Press, 1981. – 330 p.

[2] Schetzen, M. The Volterra und Winer theorems of nonlinear systems. – New York: Wiley, 1980. – 280 p.

[3] Kim, K.I. A digital method of modeling quadratically non-linear systems with a general random input / E.J. Powers // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1988. – Vol. 36(11). – P. 1758-1769.

[4] Labunets, V. New networks for nonlinear, linear and orthogonal transforms / E. Labunets // V-th Int. Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays (PARCELLA'90). – 1990. – P. 239-244.

[5] Kolmogorov, A.N. On the representation of continuous functions of several variables by superposition of continuous functions of one variable and addition / A.N. Kolmogorov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1957. – Vol. 114. – P. 369-373.