

Авторегрессионные модели случайных полей на круге

В.Р. Крашенинников¹, Ю.Е. Кувайскова¹, А.Ю. Субботин¹

¹Ульяновский государственный технический университет, Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027

Аннотация. В настоящее время подавляющее множество известных моделей изображений представляют собой разновидности случайных полей, заданных на прямоугольных плоских сетках или сетках большей размерности. В некоторых практических ситуациях изображения имеют радиальную, кольцевую или радиально-кольцевую структуру. Например, изображение взрыва, глаза, среза ствола дерева или кровяного сосуда и т.д. Это обстоятельство требует своего учета в моделях случайных полей. В настоящей работе предлагаются авторегрессионные модели однородных и неоднородных случайных полей, заданных на круге. Приводятся выражения корреляционной функции полей и примеры имитированных изображений.

1. Введение

В качестве математических моделей изображений используются различные модели случайных полей. Однако в большинстве известных моделей поля определены на прямоугольных плоских сетках или сетках большей размерности. Для представления изображений определенного класса приходится подбирать соответствующую модель случайного поля, например, поля с заданным видом корреляционной функции. Для этой задачи корреляционного синтеза могут быть применены авторегрессионные, волновые и другие модели [1-6]. В [6-8] предложены модели изображений, заданных на криволинейных поверхностях.



Рисунок 1. Примеры изображений радиально-кольцевой структуры.

В некоторых практических ситуациях обрабатываемые изображения имеют радиальную, кольцевую или радиально-кольцевую структуру. Например, показанные на рисунке 1 изображения глаза, среза ствола дерева и клетки. Кроме того, радиолокационные, ультразвуковые и другие изображения физически получаются в полярных или сферических координатах. Эти обстоятельства требуют своего учета в моделях случайных полей. В настоящей работе предлагаются авторегрессионные модели случайных полей, заданных на круге.

2. Модели однородных случайных полей на круге

В [6] для представления изображений на цилиндрической сетке была использована модель, подобная авторегрессионной модели Хабиби [9] плоского изображения

$$x_{k,l} = \rho_1 x_{k,l-1} + \rho_2 x_{k-1,l} - \rho_1 \rho_2 x_{k-1,l-1} + \beta \xi_{k,l}, \tag{1}$$

где в значении $x_{k,l}$ первый индекс k является номером витка; второй индекс l – номером пикселя в витке - совокупность независимых стандартных нормальных случайных величин. Таким образом, можно считать, что k – номер кольца (витка); l – номер узла на витке; $l = 0, T - 1$; $x_{k,l} = x_{k+1,l-T}$ при $l \geq T$; T – период, то есть количество точек на одном витке. Для удобства анализа этой модели будем считать, что пиксели пронумерованы и расположены на цилиндрической спирали (рисунок 2(а)). Тогда модель (1) может быть представлена в эквивалентном виде как модель случайного процесса, представляющего собой развертку изображения вдоль спирали:

$$x_n = \rho_1 x_{n-1} + \rho_2 x_{n-T} - \rho_1 \rho_2 x_{n-T-1} + \beta \xi_n, \tag{2}$$

где $n = kT + l$. Применяя аппарат z-преобразований, можно показать, что процесс, заданный моделью (2), однороден, имеет нулевое среднее, дисперсию

$$\sigma^2 = \frac{\beta^2(1 + \rho_2 s)}{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)(1 - \rho_2 s)}$$

и ковариационную функцию

$$V(m) = M[x_n x_{n \pm m}] = \beta^2 \left(\frac{1}{(1 - \rho_2^2)T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{z_k}{(1 - \rho_1 z_k)(z_k - \rho_1)} z_k^m + \frac{s}{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_1 s)(s - \rho_2)} \rho_1^m \right), \tag{3}$$

где $z_k = \sqrt{\rho_2} \exp(2\pi k i / T)$ и $s = \rho_1^T$. Эта функция затухающе-периодична, убывает с увеличением номера периода, то есть с увеличением расстояния значения процесса становятся менее коррелированными (рисунок 2(б)). На рисунке 2(в) показан пример разрезанного вдоль и развернутого цилиндрического изображения, имитированного с помощью модели (2).

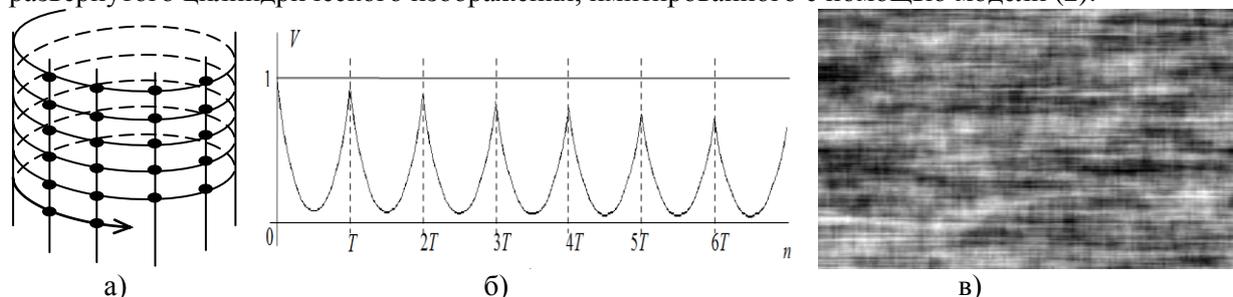


Рисунок 2. Цилиндрическое изображение: (а) цилиндрическая сетка, (б) вид корреляционной функции, (в) пример имитации.

В [6] для представления изображений на круге в полярных координатах была использована модель (2), где в значении $x_{k,l}$ первый индекс k является показателем полярного радиуса $r = k\Delta r$; второй индекс l – показателем полярного угла $\varphi = l\Delta\varphi$. Таким образом, можно считать, что k – номер кольца (витка); l – номер узла на витке. Параметр ρ_1 характеризует корреляцию между соседними элементами одного витка (по углу), а параметр ρ_2 – корреляцию между соседними витками (по радиусу). Для удобства анализа этой модели кольца можно считать и витками спирали Архимеда, то есть развернуть последовательность колец в ряд. Отметим, что это представление в виде спирали сделано условно для облегчения анализа. На изображении последовательность витков условной спирали являются последовательностью расширяющихся окружностей.

При $\rho_1 < \rho_2$ изображение будет иметь более высокую корреляцию в радиальных направлениях, на рисунке 3(а) показано имитированное изображение при $\rho_1 = 0.95$ и $\rho_2 = 0.99$. При $\rho_1 > \rho_2$

изображение будет иметь более высокую корреляцию в круговом направлении, на рисунке 3(б) показано имитированное изображение при $\rho_1 = 0.99$ и $\rho_2 = 0.95$ (это изображение получено преобразованием цилиндрического изображения на рисунке 2(в) в круговое). В случае $\rho_1 \approx \rho_2$ изображение примерно одинаково коррелировано в обоих направлениях, на рисунке 3(в) показано такое имитированное изображение при $\rho_1 = \rho_2 = 0.95$.

Ковариационной функцией круговых изображений является (3), так как они определяются моделью (2). Но эти ковариации относятся к линейной нумерации пикселей. Поэтому получающееся изображение однородно только по этой нумерации. Если же рассматривать евклидовы расстояния, то корреляция изображения ослабевает при удалении от центра. Но это вполне соответствует специфике радиально-кольцевых изображений. Отметим, что, применяя более сложные виды авторегрессии, можно получать круговые изображения с самыми различными свойствами (то есть с ковариационными функциями отличных от (3) типов).

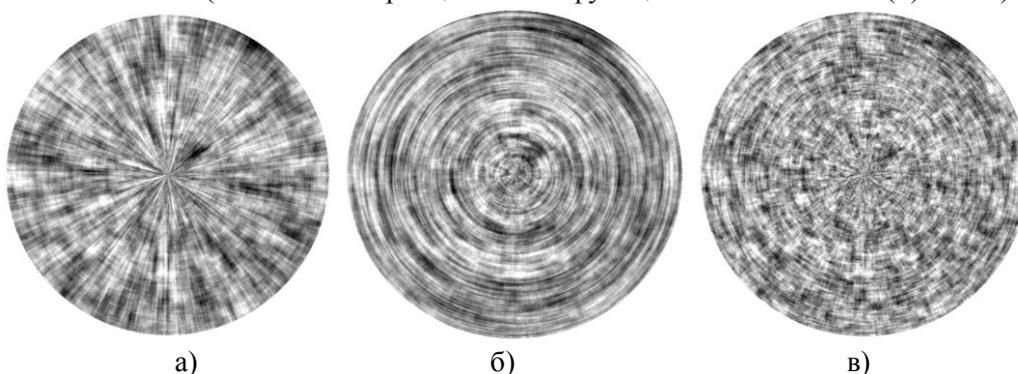


Рисунок 3. Имитированные изображения на круге при различных значениях параметров модели (2): (а) $\rho_1 = 0.95$ и $\rho_2 = 0.99$, (б) $\rho_1 = 0.99$ и $\rho_2 = 0.95$, (в) $\rho_1 = \rho_2 = 0.95$.

3. Дважды стохастические модели неоднородных случайных полей на круге

Поля, определяемые моделью (2), линейно однородны. Для представления неоднородных полей в [5, 10] применены дважды стохастические модели, в которых одно или несколько (управляющих) случайных полей задают параметры итогового (управляемого) поля. Используем эту идею для моделей круговых полей.

Пусть $Y = \{y_n\}$ - реализация кругового изображения, полученная с помощью модели вида (2). Примем Y за управляющее изображение, которое формирует переменные параметры управляемого изображения $X = \{x_n\}$ в соответствии с моделью (2), в которой вместо постоянных ρ_1 и ρ_2 использованы $\rho_{1,n+1} = r_1\rho_{1,n} + \gamma_1 y_n$, $\rho_{2,n+1} = r_2\rho_{2,n} + \gamma_2 y_n$. На рисунке 4 показан пример такого моделирования при $r_1 = r_2 = 0.999$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.005$ и управляющем изображении преимущественно радиальной структуры.

В описанной модели два изображения неравноправны: одно управляет параметрами другого. В [11] предложена модель авторегрессионных изображений, определенных на цилиндре, совместно управляющих параметрами друг друга. Применим этот подход и для круговых изображений. Пусть изображение X определяет параметры для очередного пикселя изображения Y , как в (4). В это же время изображение Y аналогичным образом задает параметры для очередного элемента изображения X . В результате эти два изображения совместно управляют параметрами друг друга. На рисунке 5 показан пример таких изображений. Заметна значительная коррелированность изображений, являющаяся следствием взаимного влияния на параметры авторегрессии их моделей.

4. Заключение

В работе предложены авторегрессионные модели случайных полей на круге, позволяющие описывать и имитировать круговые изображения радиально-кольцевой структуры. Приведены

выражения ковариационной функции. Для представления неоднородных изображений применены дважды стохастические модели со случайными неоднородностями. Выбор параметров этих моделей позволяет представлять широкий класс таких изображений. Приведены примеры применения описанных моделей для имитации круговых изображений.

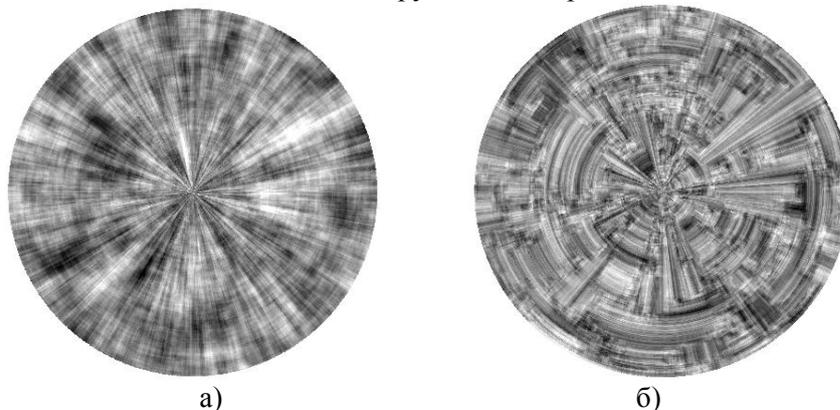


Рисунок 4. Имитированные изображения с управлением: (а) управляющее, (б) управляемое.

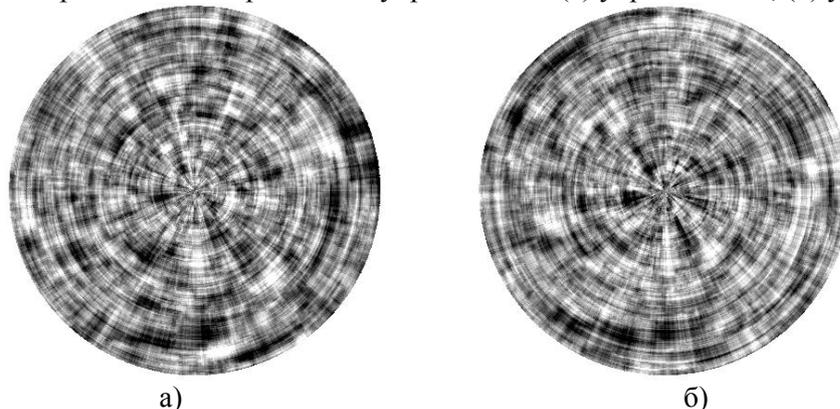


Рисунок 5. Имитированные изображения со взаимным влиянием.

5. Литература

- [1] Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В. А. Соффера. – М.: Физматлит, 2001. – 784 с.
- [2] Визильтер, Ю.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения / Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов, А.В. Бондаренко, М.В. Осоков, А.В. Моржин. – М.: Физматкнига, 2010. – 672 с.
- [3] Шалыгин, А.С. Прикладные методы статистического моделирования / А.С. Шалыгин, Ю.А. Палагин. – Ленинград: Машиностроение, 1986.– 320 с.
- [4] Спектор, А.А. Многомерные дискретные марковские поля и их фильтрация при наличии некоррелированного шума / А.А. Спектор // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т. 30, № 5. – С. 965-972.
- [5] Васильев, К.К. Представление и обработка спутниковых многозональных изображений / К.К. Васильев, В.Е. Дементьев. – Ульяновск: УлГТУ, 2017. – 251 с.
- [6] Krasheninnikov, V.R. Multidimensional image models and processing / V.R. Krasheninnikov, K.K.Vasil'ev // Intelligent Systems Reference Library. – 2018. – Vol. 135. – P. 11-64.
- [7] Крашенинников В.Р. Модели случайных полей на поверхностях // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т. 4(3). – С. 812-816.
- [8] Крашенинников, В.Р. Авторегрессионные модели изображений на круге / В.Р. Крашенинников, А.Ю. Субботин // Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем: сборник научных трудов. – УлГТУ. – 2018. – Т. 11. – С. 115-119.

- [9] Habibi, A. Two-dimensional Bayesian estimate of images / A. Habibi // Proc IEEE. – 1972. – Vol. 60(7). – P. 878-883.
- [10] Woods, J.W. Two-dimensional Kalman filtering // Topics in Applied Physic. – 1981. – Vol. 42. – P. 11-64.
- [11] Крашенинников, В.Р. Дважды стохастическая модель квазипериодического процесса в виде изображения на цилиндре / В.Р. Крашенинников, А.Ю. Субботин // Труды Международной научно-технической конференции «Перспективные информационные технологии» (ПИТ-2018). – Самара: Самарский научный центр РАН, 2018. – С. 1017-1021.

Autoregressive models of random fields on the circle

V.R. Krasheninnikov¹, Yu.E. Kuvayskova¹, A.U. Subbotin¹

¹Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets street 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

Abstract. At present, the vast majority of known image models are varieties of random fields defined on rectangular flat grids or grids of higher dimension. In some practical situations, images have a circular or radial-circular structure. For example, an image of a facies (thin film of dried) biological fluid, an explosion picture, cut of tree trunk, fruit or blood vessel, etc. These circumstances require their consideration in random field models. This paper proposes autoregressive models of homogeneous and inhomogeneous random fields defined on a circular spiral. The problem of correlation analysis of such models is considered. Examples of imitation of circular images are given