

# Асимптотическое моделирование термодеструкции в тонких пластинах из композиционных материалов

Ю.И. Димитриенко<sup>1</sup>, А.Ф. Хузин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Рубцовская наб. 2/18, Москва, Россия, 105005

**Аннотация.** Данная работа описывает метод моделирования термомеханического поведения тонких пластин из полимерных композиционных материалов (ПКМ) при локальном нагреве. Разрабатывается четырехфазная модель внутреннего теплопереноса и термомеханического поведения пластин. Для расчёта модели применяется метод асимптотического осреднения. В работе сформулированы локальные задачи и получено аналитическое решение задачи термодеструкции.

## 1. Введение

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) широко применяются для постройки ракетно-космической, авиационной и автомобильной техники при изготовлении элементов на которые воздействует высокая температура. Под воздействием высоких температур свыше 1500 - 2000<sup>0</sup>С происходит разрушение конструкции из ПКМ [1]. Физико-химические процессы, которые происходят в это время, объединяют под общим понятием – термодеструкция. В связи со сложностью явления термодеструкции, актуальным является теоретическое изучение и решение задач внутреннего теплопереноса совместно с задачей механики для оценки возможного разрушения композитных пластин.

С появлением мощных вычислительных компьютеров стало намного проще решать задачи теории термомеханики в трёхмерной постановке для конструкций сложной формы. Однако двумерная постановка даёт ряд преимуществ – это снижение размерности задачи, отсутствие необходимости детального построения сеток по толщине координате для достижения приемлемой точности расчета напряжений. В связи с этим востребованы попытки модификации классических задач теории оболочек и пластин, направленные на улучшение алгоритмов расчёта термоупругости [2]. Таких модификаций, предложено достаточно много в отечественной и зарубежной литературе.

В работе [1] описана механика композиционных материалов при высоких температурах, где применяется теория тонких пластин и оболочек с двумерной микроструктурой, с использованием метода асимптотического осреднения[3] (метод гомогенизации - МГ). Основная идея метода асимптотического осреднения состоит в преобразовании исходной системы уравнений термомеханики к системе осреднённых уравнений, описывающей с точностью до малых величин порядка  $\kappa$ .

Метод асимптотического осреднения позволяет установить математически точное представление эффективных определяющих соотношений по свойствам отдельных фаз композита. Для этой цели необходимо дополнительно решить локальные задачи [1].

Целью исследования является развитие метода асимптотического осреднения для решения задачи термодеструкции многослойных тонких композиционных пластин.

## 2. Применение метода асимптотического осреднения

### 2.1 Постановка задачи

Рассматривается многослойная тонкая пластина (рисунок 1) постоянной толщины. Для пластины вводится малый параметр:

$$\kappa = h / L \ll 1, \quad (1)$$

как отношение общей толщины композита  $h$  к характерному размеру  $L$ , где  $L$  – её максимальная длина.

Также вводятся другие характерные величины:  $t_0$  - характерное время исследуемого процесса нагрева,  $c_0$  - характерное значение удельной теплоёмкости,  $\rho_0$  - характерное значение плотности,  $v_0$  - вектора скорости движения газовой фазы в порах,  $\theta_0$  - температуры,  $k_0$  - теплопроводности,  $\Delta e_0^0$  - удельной теплоты термодеструкции матрицы,  $\sigma_0$  - напряжения,  $K_0$  - газопроницаемости,  $J_0$  - скорости тепломассопереноса. Тогда можно ввести соответствующие им безразмерные величины, а также величины, которые зависят от них [4]:

$t = \tilde{t} / t_0$  - время;  $x_k = \tilde{x}_k / L$  - координаты;  $c = \tilde{c} / c_0$  - удельная теплоемкость. Здесь  $c_l = \tilde{c} / c_0$ , где  $l = f, b, p, g$ ;  $\rho = \tilde{\rho} / \rho_0$  - плотность. Здесь  $\rho_l = \tilde{\rho} / \rho_0$ , где  $l = f, b, p, g$ ;  $\rho_f, \rho_b, \rho_p$  - плотности твёрдых фаз, которые являются постоянными;  $\rho_g$  - среднее по объему значение газовой плотности газовой фазы и является переменной.  $v_{gi} = \tilde{v}_{gi} / v_0$  - вектор скорости движения газовой фазы в порах;  $\theta = \tilde{\theta} / \theta_0$  - температура;  $k_{ij} = \tilde{k}_{ij} / k_0$  - компоненты тензора теплопроводности;  $q_i = \tilde{q}_i L / k_0 \theta_0$  - компоненты вектора теплового потока;  $\Delta e^0 = \tilde{\Delta e}^0 / \Delta e_0^0$  - удельная теплота термодеструкции матрицы;  $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} / \sigma_0$  - компоненты тензора напряжений;  $K_i = \tilde{K}_{ij} / K_0$  - компоненты тензора газопроницаемости;  $J = \tilde{J} / J_0$  - массовая скорость термодеструкции;  $C_{ijkl} = \tilde{C}_{ijkl} / \sigma_0$  - компоненты тензора модулей упругости;  $u_j = \tilde{u}_j / L$  - компоненты вектора перемещений;  $\nabla_j = \partial / \partial x_j$  - оператор дифференцирования по декартовым координатам;  $p_e = \tilde{p}_e / \rho_0 R \theta_0$  - местное давление внешнего газового потока на поверхности,  $p = \tilde{p} / \rho_0 R \theta_0$  - поровое давление г-фазы;  $\varphi_l$  - объёмные концентрации фаз,  $l = f, b, p, g$  (безразмерные);  $f_{kl}$  - тензор межфазного взаимодействия (безразмерный).

Волной сверху обозначены соответствующие размерные величины. Малые латинские индексы  $i, j, k \dots$  имеют значения 1, 2, 3, а большие  $I, J, K \dots$  имеют значения 1, 2.

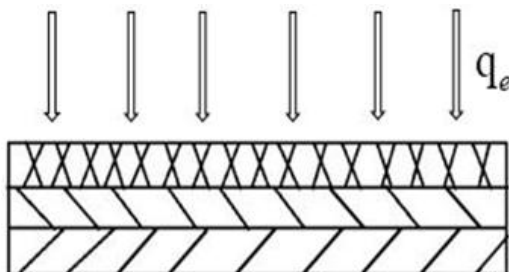


Рисунок 1. Многослойная пластина, на который действует тепловой поток.

Для описания термомеханического поведения многослойной тонкой композиционной пластины, формулируется трехмерная задача тепломассопереноса и деформирования. Математически в безразмерном виде задача записывается следующим образом [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_j (\sigma_{ij} - \varphi_g p \delta_{ij}) = 0, \quad \frac{C}{\kappa^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla_i q_i - c_g \nabla_i \theta \cdot \rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi} - J \Delta e^0, \\ \frac{\partial \rho_g \varphi_g}{\partial t} + \nabla_i \cdot \rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi} = J \Gamma, \quad \rho_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} = -J, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) \end{array} \right. \quad (2)$$

В задачу (2) входят: уравнение равновесия, уравнение теплопереноса в термодеструкующем композите, уравнение фильтрации газов в порах композиционного материала, уравнение изменения массы полимерной фазы матрицы, соотношение Коши.

К уравнениям добавляются определяющие соотношения. В безразмерном виде они выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = -C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T) - f_{ij} p \delta_{ij}, \quad g_j = \nabla_j \theta, \\ q_i = -k_{ij} g_j, \quad p = R \rho_g \theta, \quad \rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi} = -\mathbf{K}_{ij} \cdot \nabla_j p \end{array} \right. \quad (3)$$

Определяющие соотношения (3) состоят из: соотношения для твердого каркаса (закон Гука), выражения для градиента температуры, закона Фурье, соотношения Менделеева-Клапейрона для газовой фазы, закона Дарси.

В соотношениях (3) обозначены  $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} \Delta \theta$  - компоненты тензора тепловой деформации, которые являются функциями перепада температуры  $\Delta \theta = \theta - \theta_0$ , где  $\theta_0$  - начальная отсчетная температура,  $\alpha_{kl}$  - компоненты тензора теплового расширения,  $C = \rho c / Fo_0$  - массовая теплоёмкость, которая различна на для каждого слоя, где  $Fo = k_0 t_0 / \rho_0 c_0 L^2$  - критерий Фурье.

## 2.2 Асимптотическое разложение

Вводится безразмерная локальная координата  $\xi$ :  $\xi = x_3 / \kappa$ . Координаты  $x_3$  и  $\xi$  - независимые переменные. Координата  $\xi$  по толщине пластины изменяется в диапазоне  $-0.5 < \xi < 0.5$ . Термоупругие характеристики пластины можно рассматривать как функции координаты  $\xi$ :

$$\Omega = \Omega(\xi), \quad \Omega = \{C_{ijkl}, k_{ij}, \varepsilon^T, \sigma, p, \dots\} \quad (4)$$

Таким образом задача содержит локальную координату  $\xi$ , а также малый параметр  $\kappa$  (безразмерный). И решение задачи можно искать в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$  в виде функций, зависящих от глобальных  $x_i$  (медленных) и локальных  $\xi$  (быстрых) координат [1, 19].

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = u_k^{(0)}(x_i) + \kappa u_k^{(1)}(x_i, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_i, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_i, \xi) + \dots, \\ \theta = \theta^{(0)}(\xi) + \kappa \theta^{(1)}(x_i, \xi) + \kappa^2 \theta^{(2)}(x_i, \xi) + \kappa^3 \theta^{(3)}(x_i, \xi) + \dots, \\ \rho_g = \rho_g^{(0)}(\xi) + \kappa \rho_g^{(1)}(x_i, \xi) + \kappa^2 \rho_g^{(2)}(x_i, \xi) + \kappa^3 \rho_g^{(3)}(x_i, \xi) + \dots, \\ \varphi_g = \varphi_g^{(0)}(\xi) + \kappa \varphi_g^{(1)}(x_i, \xi) + \kappa^2 \varphi_g^{(2)}(x_i, \xi) + \kappa^3 \varphi_g^{(3)}(x_i, \xi) + \dots \end{array} \right. \quad (5)$$

Индексами  $I, J, K, L$  обозначают значения равные  $\overline{1, 2}$ . Значения  $i, j, k, l$  равны  $\overline{1, 2, 3}$ .

Теперь разложения (5) подставим в систему уравнений (2) и в определяющие соотношения (3). При подстановке используем правило дифференцирования сложных функций, зависящих от локальных и глобальных координат  $f(x_1, x_2, \xi)$ ,  $\xi = \frac{x_3}{\kappa}$  следующим образом [3]:

$$\partial / \partial x_j \rightarrow \partial / \partial x_j + (1/\kappa) \delta_{j3} \partial / \partial \xi, \quad \delta_{i3} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ 1, & i = 3 \end{cases} \quad (6)$$

## 3. Формулировка локальных задач

После подстановки рядов (5) в системы (2) и (3) получаем локальные формулировки задач.

Локальная задача термодеструкции (2) нулевого приближения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \theta_{,i}^{(0)} + q_{3/3}^{(-1)} = 0, \quad (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})_{/3}^{(0)} = 0, \\ \rho_b \varphi_{b,i}^{(0)} = -J^{(0)}, \quad \text{где } J^{(0)} = J(\varphi_b^{(0)}, \theta^{(0)}), \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \\ \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(0)}), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(0)} \end{array} \right. \\ g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)}, \quad -q_3^{(-1)} = k_{33} g_3^{(-1)}, \\ p^{(0)} = R(\rho_g \theta)^{(0)}, \quad p_{/3}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Локальная задача термодеструкции для первого приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \theta_{,i}^{(1)} + q_{I,I}^{(-1)} + q_{3/3}^{(0)} + c_g \theta_{/3}^{(0)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})^{(0)} = 0, \\ (\rho_g \varphi_g)_{,i}^{(0)} + (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gI})_{,I}^{(0)} + (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})_{/3}^{(1)} = J^{(0)} \Gamma, \\ \rho_b \varphi_{b,i}^{(1)} = -J^{(1)}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \\ \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \end{array} \right. \\ g_J^{(0)} = \theta_{,J}^{(0)}, \quad g_3^{(0)} = \theta_{/3}^{(1)}, \\ -q_3^{(0)} = k_{3J} g_J^{(0)} + k_{33} g_3^{(0)}, \quad p^{(1)} = R(\rho_g \theta)^{(1)}, \\ (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi})^{(0)} = -(\mathbf{K}_{ij} p_{,j})^{(0)} \end{array} \right. \quad (8)$$

Локальная задача термодеструкции второго приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \theta_{,i}^{(2)} + q_{I,I}^{(0)} + q_{3/3}^{(1)} + c_g (\theta_{,i}^{(0)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gI})^{(0)} + \theta_{/3}^{(0)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})^{(1)} + \theta_{/3}^{(1)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})^{(0)}) + \\ + J^{(0)} \Delta e^0 = 0, \\ (\rho_g \varphi_g)_{,i}^{(1)} + (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gI})_{,I}^{(1)} + (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})_{/3}^{(2)} = J^{(2)} \Gamma, \\ \rho_b \varphi_{b,i}^{(2)} = -J^{(2)}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}), \\ \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}), \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)}, \end{array} \right. \\ g_J^{(1)} = \theta_{,J}^{(1)}, \quad g_3^{(1)} = \theta_{/3}^{(2)}, \\ -q_3^{(1)} = k_{3J} g_J^{(1)} + k_{33} g_3^{(1)}, \quad p^{(2)} = R(\rho_g \theta)^{(2)}, \\ (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi})^{(1)} = -(\mathbf{K}_{ij} p_{,j})^{(1)} \end{array} \right. \quad (9)$$

Локальная задача термодеструкции третьего приближения:

$$\begin{cases}
 C \theta_{,i}^{(3)} + q_{i,i}^{(1)} + q_{3/3}^{(2)} + c_g (\theta_{,i}^{(0)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi})^{(1)} + \theta_{/3}^{(1)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})^{(1)} + \theta_{/3}^{(0)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})^{(2)} + \\
 + \theta_{,i}^{(1)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi})^{(0)} + \theta_{/3}^{(2)} (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})^{(0)}) + J^{(1)} \Delta e^0 = 0, \\
 (\rho_g \varphi_g)_{,i}^{(2)} + (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi})_{,i}^{(2)} + (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{g3})_{/3}^{(3)} = J^{(3)} \Gamma, \\
 \rho_b \varphi_{b,i}^{(1)} = -J^{(3)}, \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{ij}^{(3)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(3)} + u_{j,i}^{(3)}), \\
 \varepsilon_{i3}^{(3)} = \frac{1}{2} (u_{3,i}^{(3)} + u_{i/3}^{(4)}), \quad \varepsilon_{33}^{(3)} = u_{3/3}^{(4)}, \\
 g_j^{(2)} = \theta_{,j}^{(2)}, \quad g_3^{(2)} = \theta_{/3}^{(3)}, \\
 -q_3^{(2)} = k_{3j} g_j^{(2)} + k_{33} g_3^{(3)}, \\
 p^{(3)} = R (\rho_g \theta)^{(3)}, \quad (\rho_g \varphi_g \mathbf{v}_{gi})^{(2)} = -(\mathbf{K}_{ij} p_{,j})^{(2)}.
 \end{array} \right.
 \end{cases} \quad (10)$$

#### 4. Заключение

После решения локальных задач производится операция осреднения уравнений системы. В ходе этого происходит поиск полей перемещений, деформаций и напряжений с учётом эффекта термодеструкции.

#### 5. Литература

- [1] Димитриенко, Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах – М.: Машиностроение, 1997. – 362 с.
- [2] Димитриенко, Ю.И. Механика сплошной среды. В 4-х томах. Том 4. Основы механики твёрдого тела – М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2013. – 624 с.
- [3] Бахвалов, Н.С. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко – М.: Наука, 1974. – 352 с.
- [4] Димитриенко, Ю.И. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин / Ю.И. Димитриенко, Д.О. Яковлев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 259-282.

# Asymptotic modelling of heat and mass transfer in thin plates made of composite materials

Yu.I. Dimitrienko<sup>1</sup>, A.F. Khuzin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Rubtsovskaya nab. 2/18, Moscow, Russia, 105005

**Abstract.** This work is based on the method of modeling the thermomechanical behavior of thin plates made of polymer composite materials (PCM) under local heating. A four-phase model of internal heat transfer and thermomechanical behavior of the plates is being developed [1]. To calculate the models, the method of asymptotic averaging is used. In the work, local problems are formulated and an analytical solution to the problem of thermal destruction is obtained.