

# Асимптотические методы решения нелинейных задач на собственные значения

А.А. Пекшева<sup>1</sup>, Л.В. Степанова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Целью данной работы является получение асимптотического решения нелинейной задачи на собственные значения, которая следует из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины антиплоского (продольного) сдвига. Для вычисления собственных значений и соответствующих им собственных функций применялся метод искусственного малого параметра, который оказался очень эффективным, даже для больших значений показателя  $n$ . Чем больше значения  $n$ , тем больше слагаемых следует удерживать в асимптотическом разложении искомых функций. Это приведет к усложнению процедуры построения собственных функций в случае более сложных задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига. Получена сумма асимптотического ряда. Она представляет собой разложение собственной функции в ряд. В настоящей работе получено точное выражение для собственной функции нелинейной задачи на собственные значения.

## 1. Введение

Настоящая работа направлена на определение собственных функций в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими соотношениями. Проведенный асимптотический анализ показал, что метод искусственного малого параметра является эффективным средством для вычисления собственных значений и соответствующих им собственных функций, даже для больших значений показателя  $n$  [1-6].

## 2. Фундаментальные уравнения. Постановка задачи

Определение полей напряжений и деформаций у вершины трещины требует решения системы уравнений. Она состоит из уравнения равновесия, условия совместности и определяющих уравнений

$$r\sigma_{rz,r} + \sigma_{rz} + \sigma_{\theta z,\theta} = 0, \varepsilon_{rz,\theta} - r\varepsilon_{\theta z,r} - \varepsilon_{\theta z} = 0, \varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2 \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $B$ ,  $n$  – постоянные материала, определяемые экспериментально;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$  – компоненты девиатора напряжений;  $\sigma_e = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$  – интенсивность касательных напряжений;  $r$ ,  $\theta$  – полярные координаты с полюсом в вершине дефекта, разыскивается в форме

$$\chi(r, \theta) = r^\lambda f(\theta), \quad \sigma_{rz} = \frac{\chi, \theta}{r}, \quad \sigma_{\theta z} = -\chi, r \quad (2)$$

где  $\chi(r, \theta)$  – функция напряжений. Условие совместности деформаций (1) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению (НОДУ) второго порядка относительно функции  $f(\theta)$ :

$$f''(\theta)[nf'(\theta) + \lambda^2 f^2(\theta)] + f[C_1 f'(\theta) + C_2 f^2(\theta)] = 0, \quad (3)$$

где приняты обозначения:  $C_1 = \lambda(n-1)(2\lambda-1) + \lambda^2$ ,  $C_2 = \lambda^3(n-1)(\lambda-1) + \lambda^4$ . Функция  $f(\theta)$  должна удовлетворять граничным условиям – отсутствия поверхностных условий на берегах трещины

$$f|_{\theta=\pm(\pi-\alpha)} = 0. \quad (4)$$

### 3. Аналитическое решение

Аналитическое выражение для собственных значений нелинейной задачи для дифференциального уравнения (3) было получено с помощью метода искусственного малого параметра [3 – 4], в соответствии с которым представим собственное число  $\lambda$  в виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (5)$$

где  $\lambda_0$  относится к линейной, «невозмущенной» задаче и  $\varepsilon$  – отклонение собственного значения от значения нелинейной задачи от собственного значения линейной задачи, обусловленного нелинейностью. Представим показатель упрочнения  $n$  и функцию напряжений  $f(\theta)$  в виде

$$n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j n_j \quad (6)$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j f_j(\theta), \quad (7)$$

где  $n_0 = 1$  и  $f_0(\theta)$  относятся к линейной "невозмущенной" задаче. Подставим асимптотическое разложение (5), (6), (7) в уравнение (3) и собирая слагаемые с одинаковой степенью  $\varepsilon$ , получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon^0: f_0''(\theta) + \lambda_0^2 f_0(\theta) = 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon^1: f_1''(\theta) + \lambda_0^2 f_1(\theta) = -\lambda_0[n_1(\lambda_0 - 1) + 2]f_0(\theta), \quad (9)$$

$$\varepsilon^2: f_2''(\theta) + \lambda_0^2 f_2(\theta) = -f_0''(\theta)[n_2 f_0'(\theta) + f_0^2(\theta)]\lambda_0^2 - f_0(\theta)[C_1^2 f_0'(\theta) + C_2^2 f_0^2(\theta)]\lambda_0^2, \quad (10)$$

$$\varepsilon^3: f_3''(\theta) + \lambda_0^2 f_3(\theta) = [n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)]\lambda_0 f_0(\theta)g_1/g_0 - [1 + n_1(\lambda_0 - 1)]f_0(\theta)g_1/g_0 - \\ - 2\lambda_0 n_2 f_0'(\theta)f_0(\theta)/g_0 - n_1 f_0'(\theta)f_0(\theta)/g_0 \quad (11)$$

где  $C_1^1 = n_1(4\lambda_0 - 1) + n_2\lambda_0(2\lambda_0 - 1) + 1$ ,  $C_2^2 = \lambda_0^3[n_2(\lambda_0 - 1) + n_1]$ ,  $g_0 = f_0'(\theta) + \lambda_0^2 f_0^2(\theta)$ ,  $g_1 = 2f_0'(\theta)f_1'(\theta) + 2\lambda_0 f_0^2(\theta) + 2\lambda_0^2 f_0(\theta)f_1(\theta)$ .

Получим последовательное решение краевых задач. Сначала найдем функцию  $f_0(\theta)$  из (8):

$$f_0(\theta) = 2 \cos(\theta/2) \quad (12)$$

Решение уравнения (9), удовлетворяющее краевым условиям (4), можно записать в виде:

$$f_1(\theta) = -n_1 \cos(\theta/2) \quad (13)$$

Решение уравнения (10):

$$f_2(\theta) = -\frac{1}{16} \frac{-n_1^2 + n_1^2 \cos(\theta)^2 + 8n_2 \cos \theta + 8n_2}{\cos(\theta/2)} \quad (14)$$

Решение краевой задачи (11) для функции  $f_3(\theta)$  имеет вид

$$f_3(\theta) = \frac{1}{32} \frac{n_1^3 \sin(\theta)^2 + n_1^3 \cos \theta + 3n_1^3 \cos(\theta)^2 - n_1^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 - 8n_1 n_2 \cos(\theta)^2}{\cos(\theta/2)} + \quad (15)$$

$$\frac{1}{32} \frac{-2n_1^3 \cos(\theta)^3 - 4n_1 n_2 \sin(\theta)^2 + 8n_1 n_2 - 6n_1^3}{\cos(\theta/2)} - \frac{1}{32} n_1 \frac{-2n_1^2 \cos(\theta)^2 - n_1^2 \sin(\theta)^2 + 2n_1^2}{\cos(\theta/2)} +$$

$$+ [-n_3 + n_1 n_2 + (n_2 - n_1^2) n_1] \cos(\theta/2)$$

Тщательно проанализировав решения краевых задач, можно увидеть, что асимптотическое разложение для функции  $f(\theta)$  представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой может быть вычислена по формуле (16)

$$f(\theta) = \frac{n+1}{n} \sqrt{\left[ \sqrt{(1-k^2 \sin(\theta)^2)} + \cos(\theta) \right] \left[ \sqrt{(1-k^2 \sin(\theta)^2)} - k \cos(\theta) \right]^k / 2(1-k)^k}. \quad (16)$$

#### 4. Анализ полученных результатов

Метод искусственного малого параметра является удобным средством для решения задач на собственные значения. На рисунках 1-4 приведены результаты. Кривая черного цвета показывает численное решение задачи, полученное методом Рунге-Кутты-Фельберга, кривая красного цвета - нулевое приближение, кривые синего и зеленого цвета – трехчленное и четырехчленное асимптотическое разложения. Кривые бордового и серого цвета – пятичленное и шестичленное разложение, кривая желтого цвета – семичленное асимптотическое разложение.

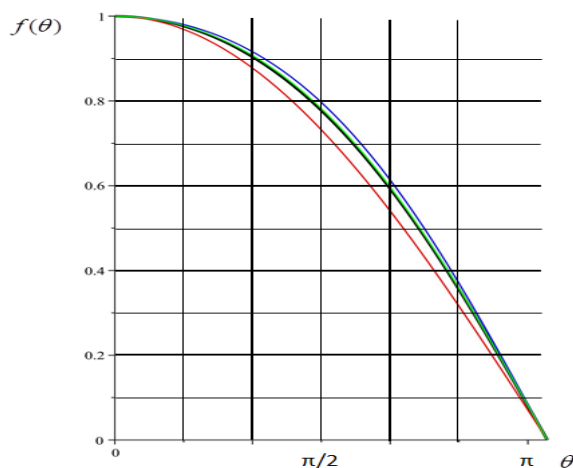


Рисунок 1. Угловые распределения функции напряжения  $f(\theta)$  для  $\lambda_0 = 1/2$  и  $n = 3$ .

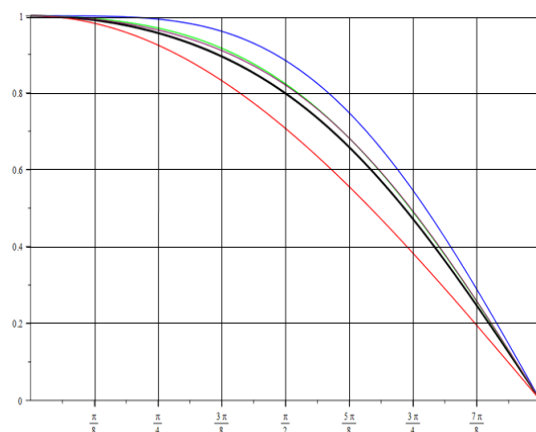


Рисунок 2. Угловые распределения функции напряжения  $f(\theta)$  для  $\lambda_0 = 1/2$  и  $n = 5$ .

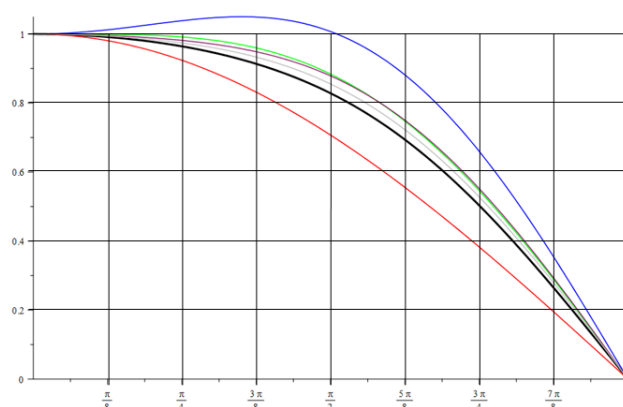


Рисунок 3. Угловые распределения функции напряжения  $f(\theta)$  для  $\lambda_0 = 1/2$  и  $n = 7$ .

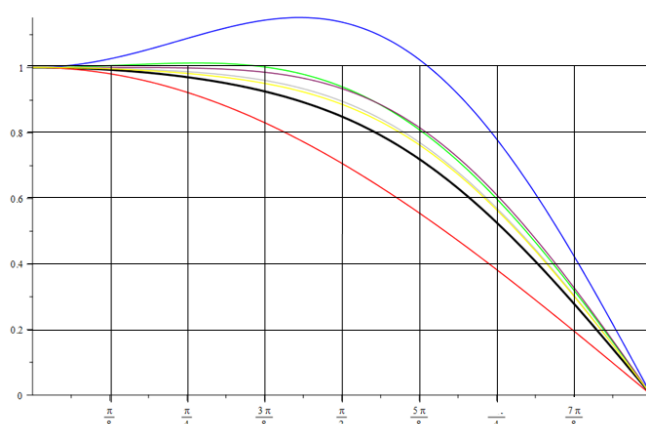


Рисунок 4. Угловые распределения функции напряжения  $f(\theta)$  для  $\lambda_0 = 1/2$  и  $n = 9$ .

Можно сделать вывод о том, что для описания полей напряжений и деформаций для собственного значения  $\lambda_0 = 1/2$  и  $n = 3$  достаточно использовать трехчленное асимптотическое разложение для приближения к точному решению. При увеличении показателя нелинейности  $n$  трехчленного асимптотического разложения недостаточно, необходимо большее количество слагаемых.

## 5. Благодарность

Авторы выражают глубокую благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (проект 19-01-00631).

## 6. Литература

- [1] Бьюи, Х.Д. Механика разрушения. Обратные задачи и решения – Москва: Физматлит, 2011. – 410 с.
- [2] Степанова, Л.В. Поле напряжений у вершины трещины при смешанном нагружении в условиях плоского напряженного состояния / Л.В.Степанова, Е.М. Адылина // Вестник СамГТУ. Естественно научная серия. – 2014. – Т. 1, № 34. – С. 109-124.
- [3] Степанова, Л.В. Асимптотика собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения / Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2016. – № 2. – С. 207-222. DOI: 10.15372/SJNM20160207.
- [4] Peksheva, A.A. Nonlinear eigenvalue problems in fracture mechanics: Eigenspectra and Eigenfunctions / A.A. Peksheva, L.V. Stepanova // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 1904. – P. 280-288.

- [5] Stepanova, L.V. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: asymptotic approach and numeric solutions of nonlinear eigenvalue problems / L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva // AIP Conference Proceedings, 2016. – P. 030030.
- [6] Stepanova, L.V. Asymptotic methods and their applications in nonlinear fracture mechanics: A review / L.V. Stepanova // Journal of Physics: Conference series. – 2018. – Vol. 1096(1). – P. 012058.

## Asymptotic methods for solving nonlinear eigenvalue problems

A.A. Peksheva<sup>1</sup>, L.V. Stepanova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** Asymptotic solutions of the nonlinear eigenvalue problems resulting from the problem of determining the stress-strain state near the crack tip of antiplane shear in power law materials are obtained. It is shown that the method of artificial small parameter is an effective way to obtain eigenvalues even for large values of  $n$ .