

Анализ волнового фронта при распространении в свободном пространстве на основе разложения по полиномам Цернике и модам Гаусса-Лагерра

П.А. Хорин¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Для описания волнового фронта часто используются ортогональные полиномы Цернике. Коэффициенты разложения волнового фронта по полиномам Цернике позволяют определить среднеквадратическую ошибку отклонения от идеального фронта. Для визуальной оценки качества изображения используют функцию рассеяния точки. В данной статье выполнено моделирование распространения волнового фронта в свободном пространстве с помощью преобразования Френеля и показано как при этом изменяются весовые коэффициенты полиномов Цернике и мод Гаусса-Лагерра. Также исследуется возможность восстановления исходного поля по этим весовым коэффициентам, полученным на некотором расстоянии.

1. Введение

Задача измерения искажений волнового фронта часто встречается в оптике, например, в конструировании наземных астрономических телескопов, в системах оптической коммуникации, в промышленной лазерной технике, в медицине и пр. [1-9]. Практически всегда измерение искажений волнового фронта выполняется с целью их компенсации, в частности средствами адаптивной или активной оптики [10-15]. Датчик волнового фронта является одним из основных элементов адаптивной системы корректировки лазерного излучения. Его задача – измерять аберрации волнового фронта и передавать эти измерения на обрабатывающее устройство. Основными причинами аберраций волнового фронта являются: турбулентность атмосферы, неидеальность форм оптических элементов системы, погрешности при юстировке системы и др. Сегодня существует большое разнообразие датчиков волнового фронта, однако наиболее распространенные - интерференционный метод [16] и метод Шака-Хартмана [17, 18]. Восстановить фазу можно также с использованием дифракционных оптических элементов (ДОЭ), выполняющих оптическое разложение светового поля по ортогональному базису [19-22]. Общепринятым представлением волнового фронта является базис полиномов Цернике [23-26]. Ранее, для прямого измерения коэффициентов аберраций волнового фронта были апробированы ДОЭ, согласованные с набором полиномов Цернике [21, 22, 27-29], которые могут успешно применяться для анализа волнового фронта с небольшими аберрациями [29]. Заметим, что полиномы Цернике не являются инвариантами к распространению в свободном пространстве и прохождению через линзовые системы [30, 31], поэтому возникают попытки анализировать аберрации волнового фронта по другим базисам [4, 32-34]. Одним из базисов, инвариантных к распространению в свободном пространстве и линзовым преобразованиям,

является базис лазерных мод Гаусса-Лагерра [35]. Многопорядковые ДОО, согласованные с набором мод Гаусса-Лагерра, также успешно применялись для оптического анализа лазерных полей [36, 37].

В данной статье выполнено моделирование распространения волнового фронта в свободном пространстве с помощью преобразования Френеля и показано как при этом изменяются весовые коэффициенты не только полиномов Цернике, но и мод Гаусса-Лагерра.

2. Теоретические основы

В данной работе рассматриваются функции Цернике в следующем виде (рис. 1):

$$Z_{nm}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi r_0^2}} R_n^m(r) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}, \tag{1}$$

где $R_n^m(r)$ – радиальные полиномы Цернике:

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^p (n-p)!}{p! \left(\frac{n+m}{2} - p\right)! \left(\frac{n-m}{2} - p\right)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2p}$$

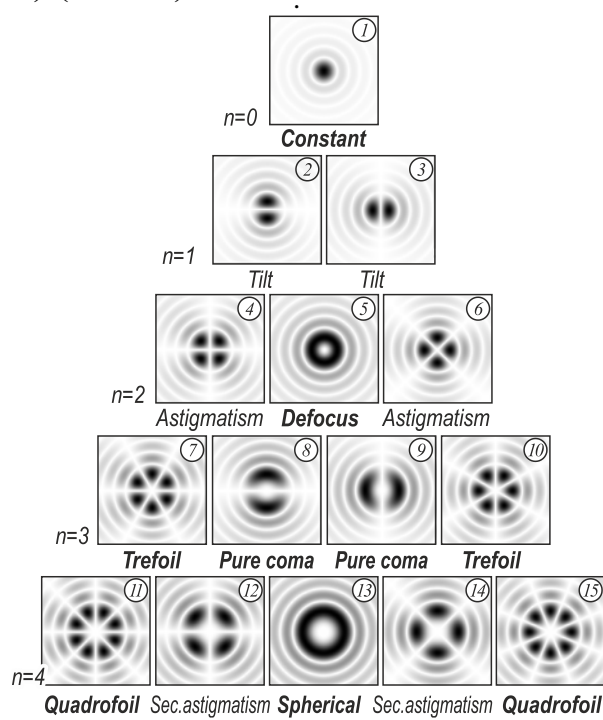


Рисунок 1. Вид базисных функций Цернике.

Аберрации волнового фронта, встречающиеся в оптических системах, обычно описываются в терминах функций Цернике следующим образом:

$$W(r, \varphi) = \exp[2\pi i \psi(r, \varphi)], \tag{2}$$

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n c_{nm} Z_{nm}(r, \varphi) \tag{3}$$

Для построения картин функции рассеяния точки (ФРТ) в присутствии типичных аберраций мы использовали простейшую оптическую систему Фурье-коррелятора.

Однако есть альтернативная возможность анализа аберраций исходного поля. В данной статье выполнено с помощью преобразования Френеля распространение волнового фронта в свободном пространстве и показано как при этом изменяются весовые коэффициенты полиномов Цернике и мод Гаусса-Лагерра.

Например, для анализа модового состава лазерного излучения используется базис Гаусса-Лагерра, для анализа волнового фронта – полиномы Цернике, для инвариантного к повороту разложения – базис угловых гармоник и функций их содержащих (Гаусса-Лагерра, Цернике).

В отличие от полиномов Цернике, моды Гаусса-Лагерра инвариантны к распространению в свободном пространстве и линзовым преобразованиям. Энергия мод Гаусса-Лагерра как в объектной, так и в спектральной плоскостях сконцентрирована в ограниченной области, хотя, строго говоря, эти функции инвариантны к преобразованию Фурье в бесконечных пределах. Свойством инвариантности к повороту обладают все радиально-симметричные световые поля. В данной работе моды Гаусса-Лагерра используются в следующем виде (рис. 2):

$$GL_n^m(r, \varphi) = K_{nm} (\sqrt{2} r / s)^m L_n^m \left((r / s)^2 \right) \exp[im\varphi], \quad (4)$$

где $L_n^m(x) = 1/n(2n+m-1-x)L_{n-1}^m(x) - (n+m-1)L_{n-2}^m(x)$ – полином Лагерра, заданный рекуррентной формулой, где $L_0^m(x) = \exp(-x^2/2)$, $L_1^m(x) = (1+m-x)\exp(-x^2/2)$.

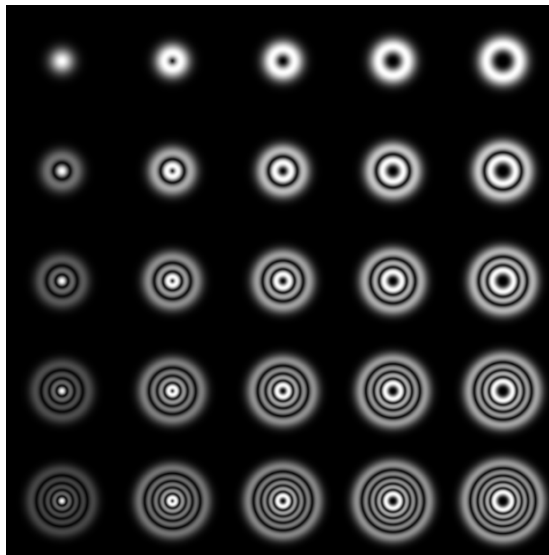


Рисунок 2. Моды Гаусса-Лагерра, $s=0.15$, $K_{nm}=1$.

Преобразование Френеля представляет собой разложение по параболическим волнам:

$$U(u, v, z) = -ik/2\pi z \exp[ikz] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp\left[ik/2z ((x-u)^2 + (y-v)^2) \right] dx dy, \quad (5)$$

при условии, что $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \ll z$, где $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны, z – расстояние, на которое распространён волновой фронт.

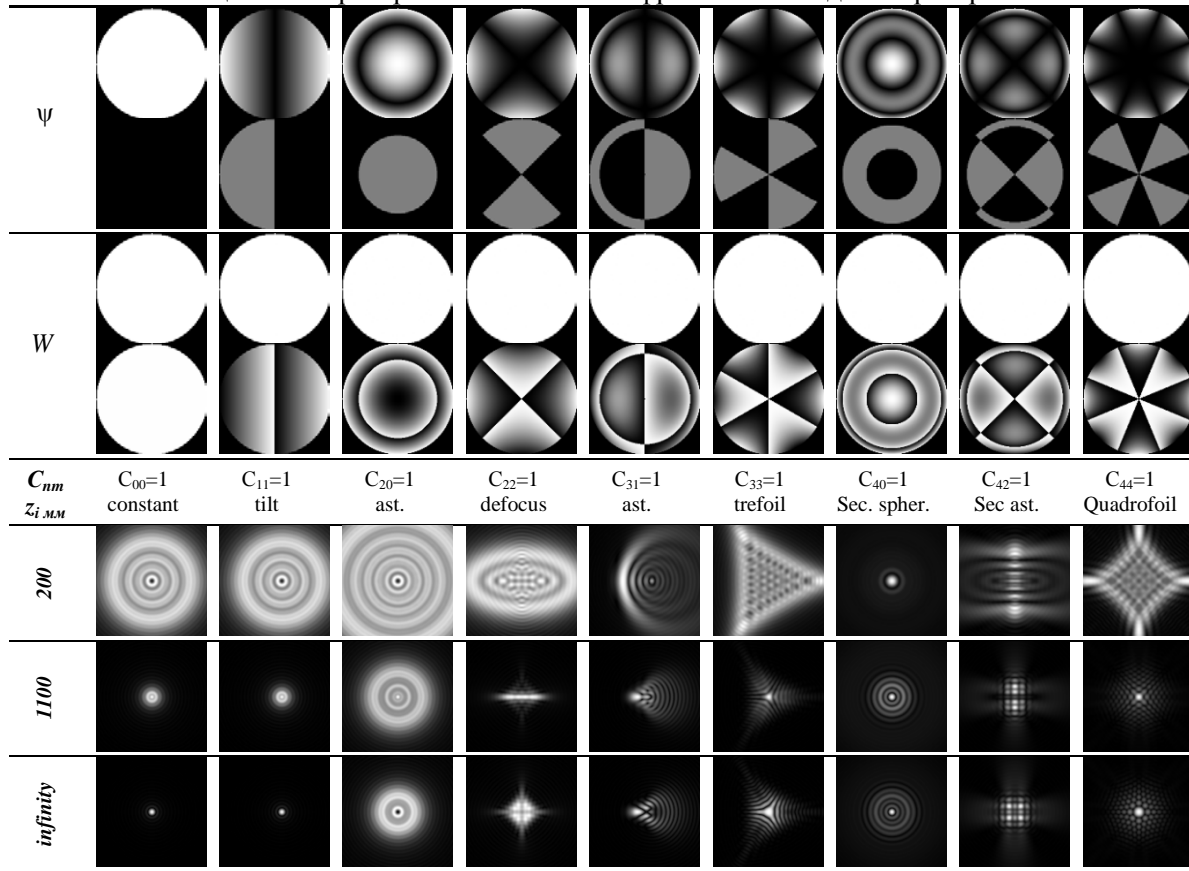
В рамках данной работы преобразование Френеля реализовано через преобразование Фурье (\mathfrak{F}) следующим образом:

$$U(u, v, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp\left[ik/2z (x^2 + y^2) \right] \exp[-2\pi i(xu + yv)] dx dy = \mathfrak{F} \left\{ f(x, y) \exp\left[ik/2z (x^2 + y^2) \right] \right\}. \quad (6)$$

3. Численное моделирование

Проведем численное моделирование распространения на расстояние z в свободном пространстве некоторого волнового фронта $W(r, \varphi)$ с фазой $\psi(r, \varphi)$ равной одному полиному Цернике Z_{nm} с весовым коэффициентом C_{nm} , который соответствует определенной аберрации. Затем разложим волновой фронт на различных расстояниях z_i , а также разложим ФРТ по полиномам Цернике и модам Гаусса-Лагерра, а затем попробуем восстановить исходную фазу волнового фронта.

Таблица 1. Распространение волнового фронта в свободном пространстве.



Проведем разложение волнового фронта на расстоянии z_i по полиномам Цернике и модам Гаусса-Лагерра при помощи анализатора Цернике и Гаусса-Лагерра. Для объективной оценки полученных коэффициентов проведем расчет среднего квадратичного отклонения (СКО) коэффициентов разложения после распространения волнового фронта $C_k^{z_i}$ и эталонных C_k по формуле $s = \sqrt{\frac{\Delta C}{c}}$, $\Delta C = \sum_{k=1}^n (C_k^{z_i} - C_k)^2$, $c = \sum_{k=1}^n C_k^2$. Были получены СКО для всех aberrаций, которые рассмотрены в таблице 1. Значения СКО представлены в таблице 2.

Таблица 2. Среднее квадратичное отклонение коэффициентов разложения по базису Цернике (Z) и модам Гаусса-Лагерра (GL).

Вид aberrации	Z ₀₀ constant	Z ₁₁ tilt	Z ₂₀ ast.	Z ₂₂ defocus	Z ₃₁ ast.	Z ₃₃ trefoil	Z ₄₀ Sec.spher.	Z ₄₂ Sec ast.	Z ₄₄ Quadrofoil
S _Z	0,078	0,165	0,065	0,114	0,125	0,077	0,029	0,105	0,077
S _{GL}	0,026	0,149	0,040	0,171	0,111	0,175	0,037	0,117	0,174

Среднее значение СКО коэффициентов разложения для базиса Цернике составляет 0,093 и 0,111 для мод Гаусса-Лагерра.

Рассмотрим пример, в котором фаза волнового фронта задана суперпозицией трёх базисных функций полиномов Цернике со следующими весовыми коэффициентами $C_{20}=0,8$; $C_{31}=1,6$; $C_{42}=0,4$ (рис.3).

Значение СКО коэффициентов разложения для базиса Цернике составляет 0,110 и 0,086 для мод Гаусса-Лагерра. Попробуем восстановить некоторое поле по формуле 3.

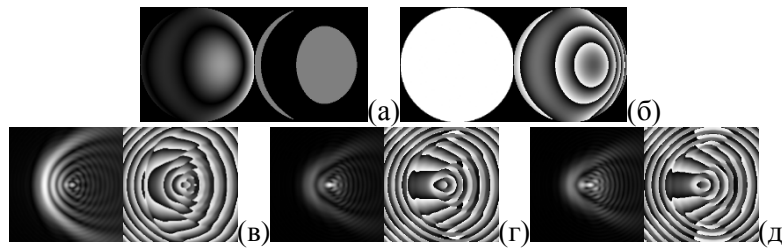


Рисунок 3. Амплитуда и фаза: (а) – фаза волнового фронта, (б) – волновой фронт, волновой фронт в плоскости $z_1=200$ (в), $z_2=1100$ (г), (д) – Фурье плоскость (ФРТ).

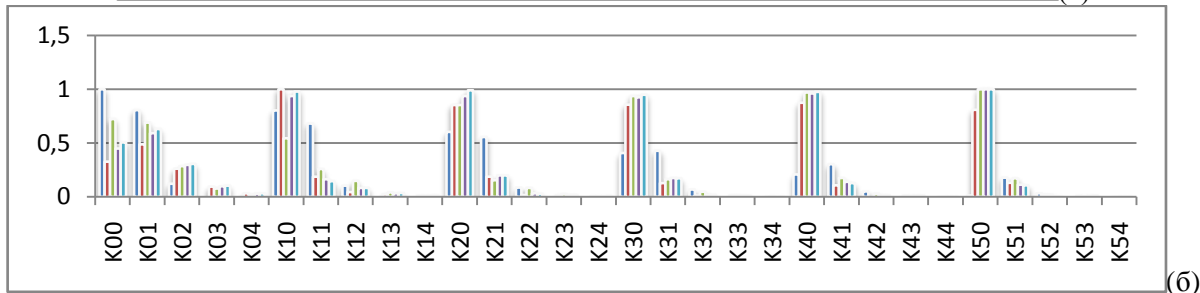
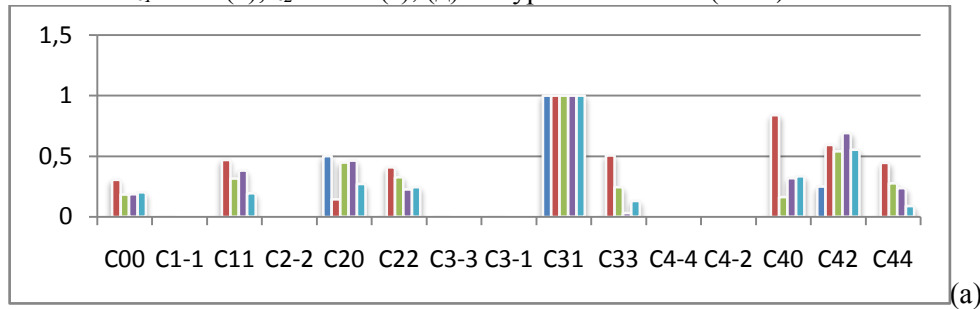


Рисунок 4. Коэффициенты разложения (абсолютные значения) по функциям Цернике (а), по модам Гаусса-Лагерра (б) ■ Фаза ВФ $\psi(r, \varphi)$ ■ ВФ $W(r, \varphi)$ ■ ВФ $z=200$ ■ ВФ $z=1100$ ■ ФРТ $z=inf$.

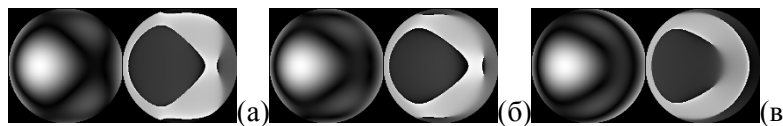


Рисунок 5. Амплитуда и фаза: восстановленный волновой фронт по комплексным коэффициентам Цернике в плоскости $z_1=200$ (а), $z_2=1100$ (б), (в) – Фурье плоскость (ФРТ).

Из рисунка 5 видно, что Цернике анализатор провел восстановление волнового фронта в некоторой плоскости некорректно, ввиду того, что базисные функции Цернике неинвариантны к операторам распространения Френеля и Фурье. На рисунке 5 (а,б,в) показана малоинформативная и сильно отмасштабированная восстановленная амплитуда и фаза волнового фронта представленного на рисунке 3 (в,г,д). Попробуем собрать поле $\xi(r, \varphi)$ по модам Гаусса-Лагерра, как $\xi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^5 \sum_{m=0}^4 K_{nm} GL_n^m(r, \varphi)$.



Рисунок 6. Амплитуда и фаза: восстановленный волновой фронт по комплексным коэффициентам Гаусса-Лагерра в плоскости $z_1=200$ (а), $z_2=1100$ (б), (в) – Фурье плоскость.

Восстановленный волновой фронт малоинформативен ввиду того, что не любая суперпозиция мод Гаусса-Лагерра инвариантна к повороту. Было предложено воспользоваться

абсолютными значениями коэффициентов Цернике для восстановления фазы заданного волнового фронта $\psi(r, \varphi)$ и абсолютными значениями коэффициентов мод Гаусса-Лагерра для восстановления волнового фронта $\xi(r, \varphi)$ в некоторой плоскости z_i .



Рисунок 7. Амплитуда и фаза: восстановленный волновой фронт по абсолютным значениям коэффициентов Цернике в плоскости $z_1=200$ (а), $z_2=1100$ (б), (в) – Фурье плоскость (ФРТ).

Визуальное сходство восстановленной (рис. 7б.) и исходной (рис. 3а.) фазы вполне очевидно. Данный результат ожидаем, и подтверждается низким значением СКО коэффициентов разложения волнового фронта в плоскости $z_2=1100$.



Рисунок 8. Амплитуда и фаза: восстановленный волновой фронт по абсолютным значениям коэффициентов мод Гаусса-Лагерра в плоскости $z_1=200$ (а), $z_2=1100$ (б), (в) – Фурье плоскость.

Рассчитаем СКО для коэффициентов разложения волнового фронта в плоскостях $z_1=200$, $z_2=1100$, $z_3=inf$ и поля $\xi(r, \varphi)$. Для этого предварительно необходимо разложить поле $\xi(r, \varphi)$ по базису полиномов Цернике (рис.9.).

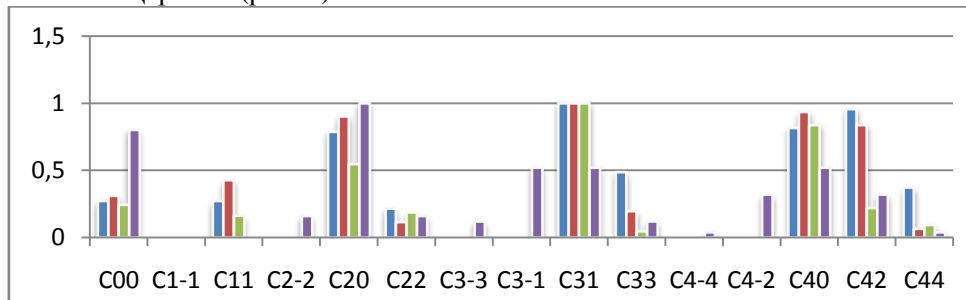


Рисунок 9. Коэффициенты разложения по функциям Цернике ■ ВФ $z=200$ ■ ВФ $z=1100$ ■ ФРТ $z=inf$ ■ Поле $\xi(r, \varphi)$.

В результате СКО для всех трёх случаев приблизительно равно 0,1. Это говорит о возможности корректного восстановления волнового фронта по модам Гаусса-Лагерра на любом расстоянии, как в ближней, так и в дальней зоне.

4. Заключение

С помощью преобразования Френеля было выполнено распространение волнового фронта в свободном пространстве и показано как при этом изменяются весовые коэффициенты разложения по базису полиномов Цернике и мод Гаусса-Лагерра.

Были распознаны коэффициентами разложения по полиномам Цернике и модам Гаусса-Лагерра при помощи анализатора Цернике и Гаусса-Лагерра. Оказалось, что СКО для любой из рассмотренных aberrаций не превышает 0,174, причем максимальные значения проявляются в случае, когда aberrаций описывается функций Цернике с одинаковым радиальным и меридиальным индексом. Так aberrация вида «наклон» Z_{11} имеет СКО коэффициентов разложения равные 0,165 и 0,149 соответственно, aberrация вида «дефокусировка» Z_{22} – 0,114 и 0,171, «трилистник» – 0,077 и 0,175, «четырёхлистник» – 0,077 и 0,174.

Кроме того, в рамках данной работы проведено исследование возможности восстановления фазовых особенностей волнового фронта с использованием ДОЭ, позволяющих выполнять

оптическое разложение светового поля по базису функций Цернике и модам Гаусса-Лагерра. Предложено использовать абсолютные значения коэффициентов для восстановления фазы волнового фронта. Показано как визуальное сходство восстановленной и исходной фазы, так и объективная оценка СКО.

В результате экспериментов было выявлено, что поле $\xi(r, \varphi)$, восстановленное по модам Гаусса-Лагерра, имеет визуальное сходство с ФРТ исследуемого волнового фронта, а так же коэффициенты его разложения имеют сравнительно малое СКО. Более того данное поле в достаточной мере инвариантно как к повороту, так и к преобразованию Френеля и Фурье.

5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-41-630542-р_а).

6. Литература

- [1] Welford, W.T. Aberrations of optical systems / W.T. Welford // Adam Hilger Press (Bristol and Philadelphia), 1986.
- [2] Smith, W.J. Modern Optical Engineering: The Design of Optical Systems, Second Edition / W.J. Smith. – New York: McGraw-Hill, 1990
- [3] Charman, W.N. Wavefront aberrations of the eye: a review / W.N. Charman // Optom. Vis. Sci. – 1991. – Vol. 68. – P. 574-583.
- [4] Dai, G.M. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions / G.M. Dai // J. Opt. Soc. Am. A. – 1995. – Vol. 12. – P. 2182-2193.
- [5] Roggemann, M.C. Imaging through Turbulence / M.C. Roggemann, B. Welsh. – CRC Press, 1996.
- [6] Hardy, J.W. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes Oxford / J.W. Hardy. – New York, 1998.
- [7] Atchison, D.A. Wavefront aberrations and their clinical application / D.A. Atchison // Clin. Exp. Optom. – 2009. – Vol. 92(3). – P. 171-172.
- [8] Хорин, П.А. Анализ aberrаций роговицы человеческого глаза / П.А. Хорин, С.Н. Хонина, А.В. Карсаков, С.Л. Бранчевский // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 810-817.
- [9] Reddy, A.N. Far-field light imaging in the presence of atmospheric turbulence with rotating anti-phase apertures: theoretical investigation / A.N.K. Reddy, P. Verma, S.N. Khonina, M. Hashemi, M. Martinez-Corral // IEEE Proceedings of International Conference on Industrial Technology (ICIT) 22-25 March 2017, Toronto, Canada. – P. 1008-1012.
- [10] Roddier, F. Adaptive optics in astronomy / F. Roddier // Cambridge, U.K., New York: Cambridge University Press; 1999.
- [11] Murdin, P. Active Optics. Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics / P. Murdin, 2000.
- [12] Justh, E.W. Analysis of a high-resolution optical wave-front control system / E.W. Justh, P.S. Krishnaprasad, M.A. Vorontsov // Automatica. – Vol. 40. – P. 1129-1141.
- [13] Lemaître, G.R. Active Optics: Vase or Meniscus Multimode Mirrors and Degenerated Monomode Configurations / G.R. Lemaître // Meccanica. – 2005. – Vol. 40. – P. 233-249.
- [14] Fedrigo, E. High performance adaptive optics system with fine tip/tilt control / E. Fedrigo, R. Muradore, D. Zilio // Control Engineering Practice. – 2009. – Vol. 17. – P. 122-135.
- [15] Клебанов, Я.М. Компенсация aberrаций волнового фронта в телескопах космических аппаратов с регулировкой температурного поля телескопа / Я.М. Клебанов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина, А.Н. Давыдов, К.А. Поляков // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 1. – С. 30-36.
- [16] Leibbrandt, G.W.R. Wave-front analysis with high accuracy by use of a double-grating lateral shearing interferometer / G.W.R. Leibbrandt, G. Harbers, P.J. Kunst // Applied Optics. – 1996. – Vol. 35(31). – P. 6151-6161.

- [17] Artzner, G. Microlens arrays for Shack-Hartmann wavefront sensors / G. Artzner // *Opt. Eng.* – 1992. – Vol. 31(6). – P. 1311-1322.
- [18] Lane, R.G. Wave-front reconstruction using a Shack-Hartmann sensor / R. G. Lane, M. Tallon // *Appl. Opt.* – 1992. – Vol. 31(32). – P. 6902-6908.
- [19] Безус, Е.А. Дифракционная оптика и нанофотоника / Е.А. Безус, Д.А. Быков, Л.Л. Досколович, А.А. Ковалев, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, А.П. Порфирьев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.С. Стафеев, С.Н. Хонина, под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2014. – С. 608.
- [20] Kotlyar, V.V. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics.* – 1998. – Vol. 45(7). – P. 1495-1506.
- [21] Khonina, S.N. Decomposition of a coherent light field using a phase Zernike filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, Y. Wang, D. Zhao // *Proc. SPIE.* – 1998. – Vol. 3573. – P. 550-553.
- [22] Ha, Y. Diffractive optical element for Zernike decomposition / Y. Ha, D. Zhao, Y. Wang, V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Proc. SPIE.* – 1998. – Vol. 3557. – P. 191-197.
- [23] Вольф, Э. Основы оптики / Э.Вольф, М. Борн. – Москва: Наука, 1973.
- [24] Noll, R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence / R.J. Noll // *J. Opt. Soc. Am.* – 1976. – Vol. 66. – P. 207-211.
- [25] Wang, J.Y. Wave-front interpretation with Zernike polynomials / J.Y. Wang, D.E. Silva // *Appl. Opt.* – 1980. – Vol. 19. – P. 1510-1518.
- [26] Sheppard, C.J.R. Zernike expansion of pupil filters: optimization of the signal concentration factor / C.J.R. Sheppard // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2015. – Vol. 32(5). – P. 928-933.
- [27] Khonina, S.N. Phase reconstruction using a Zernike decomposition filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Y. Wang, D. Zhao // *Компьютерная оптика.* – 1998. – Т. 18. – С. 52-56.
- [28] Porfirev, A.P. Experimental investigation of multi-order diffractive optical elements matched with two types of Zernike functions / A.P. Porfirev, S.N. Khonina // *Proc. SPIE.* – 2016. – Vol. 9807. – P. 98070E(9p).
- [29] Degtyarev, S.A. Zernike basis-matched multi-order diffractive optical elements for wavefront weak aberrations analysis / S.A. Degtyarev, A.P. Porfirev, S.N. Khonina // *Proc. SPIE.* – 2017. – Vol. 10337. – P. 103370Q(8p).
- [30] Хонина, С.Н. Анализ влияния волновых aberrаций на уменьшение размеров фокального пятна в высокоапертурных фокусирующих системах / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Е.А. Пелевина // *Компьютерная оптика.* – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 203-219.
- [31] Khonina, S.N. Analysis of wave aberration influence on reducing focal spot size in a high-aperture focusing system / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, E.A. Pelevina // *J. Opt.* – 2011. – Vol. 13. – P. 095702(13p).
- [32] Cannon, R.C. Optimal bases for wavefront simulation and reconstruction on annular apertures / R.C. Cannon // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1996. – Vol. 13. – P. 862-867.
- [33] Neil, M.A.A. New modal wavefront sensor: theoretical analysis / M.A.A. Neil, M.J. Booth, T. Wilson // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2000. – Vol. 17. – P. 1098-1107.
- [34] Janssen, A.J.E.M. Extended Nijboer-Zernike approach for the computation of optical point-spread functions / A.J.E.M. Janssen // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2002. – Vol. 19. – P. 849-857.
- [35] Adams, M.J. An introduction to optical waveguides / M.J. Adams // *Chichster: J. Wiley & Sons,* 1981.
- [36] Khonina, S.N. Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes, *Optics and Spectroscopy* / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // *Optics and Spectroscopy.* – 1998. – Vol. 85(4). – P. 636-644.
- [37] Khonina, S.N. Design of multi-channel phase spatial filter for selection of Gauss-Laguerre laser modes / S.N. Khonina, A.A. Almazov // *Proceedings of SPIE.* – 2002. – Vol. 4705. – P. 30-39.

Analysis of wavefront propagated in free space based on Zernike polynomial and Gauss-Laguerre mode decomposition

P.A. Khorin¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The Zernike orthogonal polynomials are often used to describe the wavefront. The coefficients of the wavefront expansion in terms of Zernike polynomials allow us to determine the root-mean-square error of the deviation from the ideal wavefront. For visual assessment of image quality a spread point function is used. In this paper, we use the Fresnel transform to propagate the initial wavefront in free space and show how the coefficients of the Zernike polynomials and Gauss-Laguerre modes change. In modern ophthalmology, aberrometers are used to measure the wavefront distortions on the surface of elements of an optical system. In this paper, we investigate the possibility of reconstructing the original field on the basis of the wavefront obtained at a certain distance.

Keywords: propagation in free space, wavefront analysis, Zernike polynomials, Fresnel transform, optical system.