

АНАЛИЗ ВОЛНОВОГО ФРОНТА НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО БАЗИСУ ФУНКЦИЙ ЦЕРНИКЕ

П.А. Хорин

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Анализ волнового фронта на выходе оптической системы человеческого глаза является актуальной задачей. Расширение методов зондирования волнового фронта привело к новому взгляду на значение рефракционных ошибок в клинической офтальмологии. Используемые aberrometry обеспечивают детальные измерения аберраций волнового фронта глаза. Наборы полиномов Цернике вполне подходят для описания этих аберраций. В настоящем докладе представлены более современные знания об аберрациях волнового фронта в глазу человека и рассматривается альтернативный метод анализа аберраций волнового фронта, основанный на разложении по полиномам Цернике.

Ключевые слова: анализ волнового фронта, полиномы Цернике, оптическая система человеческого глаза.

Введение

Анализ волнового фронта на выходе оптической системы человеческого глаза является одной из актуальных задач [1, 2].

Человеческий глаз может быть описан как система линз, состоящая из 3-х основных компонентов: роговицы, зрачка и хрусталика. Роговица (включая слезную пленку) является доминирующей структурой оптической силы глаза (в среднем около 70%). Этот компонент является основным источником аберраций в глазу. Второй – зрачок, регулирует диафрагму изображения, влияющую на количество света, который достигает сетчатки глаза. Как и в любой оптической системе, размер зрачка имеет важное значение для формирования изображения. Уменьшение зрачка увеличивает глубину фокуса и сводит к минимуму влияние аберраций высокого порядка за счет уменьшения размытия окружности на сетчатке, примерно до диаметра 2,3 мм, а затем дифракция начинает увеличивать размытие. Напротив, величина аберраций возрастает с расширением зрачка, что приводит к снижению оптического качества изображения.

Что касается третьего компонента, то возможность контролировать изменения формы и толщины хрусталика, а также расстояния между задней поверхностью роговицы и передней поверхностью линзы, позволяет глазу управлять процессом фокусировки на близких объектах.

Оптические элементы системы глаза работают согласованно, чтобы создать изображение на сетчатке. Идеальный глаз будет фокусировать изображение внешних объектов именно в фовеоле (область, которая содержит только фоторецепторы), независимо от угла поля. Однако изображение в реальной системе глаза никогда не бывает совершенным. Появление дополнительных оптических аберраций, связанных с возрастом или болезнями, существенно ухудшает качество изображения. Для компенсации искажений волнового фронта, необходимо определить, какие именно аберрации привели к этим искажениям.

Методы анализа волнового фронта. Базис функций Цернике

Наиболее широко используемым сегодня методом измерения aberrаций глаза является датчик волнового фронта Хартмана-Шака (Hartmann-Shack) [3]. Датчик состоит из массива микролинз, оптически сопряженных к зрачку глаза, и камеры, расположенной в фокальной плоскости линз. Плоский волновой фронт выглядит на фотокамере датчика как совершенно правильная сетка световых пятен. Однако, если волновой фронт искажен aberrациями, световые пятна располагаются неравномерно. Смещение каждого пятна от исходного положения пропорционально производной волнового фронта в области каждой из микролинз. Таким образом, по смещениям световых пятен датчика Хартмана-Шака восстанавливается волновой фронт, и затем вычисляются aberrации.

Общепринятым представлением волнового фронта является ряд полиномов Цернике. Низшие полиномы описывают дефокусировку и астигматизм. Коэффициенты высших порядков соответствуют сферической aberrации косых лучей, которая возникает в результате несоосности хрусталика и фовеолы, а также отклонений на периферии хрусталика.

Коэффициенты разложения волнового фронта по ортогональным полиномам Цернике позволяют определить среднеквадратическую ошибку отклонения от идеального фронта. Коэффициенты с высоким абсолютным значением автоматически указывают на те aberrации, которые наибольшим образом искажают волновой фронт в индивидуальной системе зрения и, таким образом, позволяет существенно ускорить и упростить анализ зрения пациента.

Для прямого измерения коэффициентов aberrаций волнового фронта глазной оптической системы в работе [4] предлагается использовать многоканальные дифракционные оптические элементы [5-7], согласованные с набором полиномов Цернике.

Каждая функция базиса Цернике включает два компонента: радиальный и меридиональный, поэтому базис функции Цернике обычно имеет двойную индексацию: Z_{mn} , где n - целое число, указывающее на радиальный порядок, и m - положительное или отрицательное целое число, указывающее на меридиональную частоту формы. Примеры функций Цернике показаны на рис.1.

Рассмотрим круговые полиномы Цернике, которые представляют собой полное множество ортогональных функций с угловыми гармониками в круге радиуса R :

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi R^2}} Z_n^m(r) \exp(im\varphi), \quad (1)$$

где $Z_n^m(r)$ - радиальные полиномы Цернике:

$$Z_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^p (n-p)!}{p! \left(\frac{n+m}{2} - p\right)! \left(\frac{n-m}{2} - p\right)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2p}, \quad (2)$$

$|m| \leq n$, $(n-m)$ - четное, (r, φ) - полярные координаты.

Разложение светового поля с комплексной амплитудой $E(r, \varphi)$ в ряд по функциям (1) записывается в виде

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm} \Psi_{nm}(r, \varphi) \quad (3)$$

Для нахождения коэффициентов C_{kl} , домножим выражение (3) на $\psi_{kl}(r, \varphi)$, с учётом ортогональности системы функций $\{\psi_{kl}(r, \varphi)\}$ все слагаемые ряда обращаются в ноль, кроме слагаемого при $n=k, m=1$:

$$C_{kl} = \frac{E(r, \varphi), \psi_{kl}(r, \varphi)}{\|\Psi_{kl}(r, \varphi)\|^2} \quad (4)$$

$$\langle E(r, \varphi), \psi_{kl}(r, \varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} E(r, \varphi) \overline{\psi_{kl}(r, \varphi)} dr d\varphi$$

$$\begin{aligned} \|\Psi_{kl}(r, \varphi)\|^2 &= \Psi_{kl}(r, \varphi), \Psi_{kl}(r, \varphi) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \Psi_{kl}(r, \varphi) \overline{\Psi_{kl}(r, \varphi)} dr d\varphi \end{aligned}$$

Заметим, что aberrации волнового фронта, встречающиеся в оптических системах, обычно описываются зависимостью косинуса и синуса от азимутального угла φ . В связи с этим, вместо разложения по функциям (1), как правило, используют разложение по функциям:

$$\hat{\Psi}_{nm}(r, \varphi) = 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi R^2}} Z_n^m(r) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}. \quad (5)$$

Тригонометрический базис $R_n^m(r) e^{\pm im\varphi} \rightarrow R_n^m(r) \cos(\sin) m\varphi$				
N	(n,m)	Виды aberrаций		
		Полярн. сист. координат	Декартова система координат	
0	(0,0)	Piston 1	1	
1	(1,1)	Tilt x & y $r r_0^{-1} \cos \varphi$	$\frac{1}{r_0} x$	
2	(1,-1)	Tilt x & y $r r_0^{-1} \sin \varphi$	$\frac{1}{r_0} y$	
3	(2,2)	Astigmatism $\mp 45^\circ$ $(r r_0^{-1})^2 \cos 2\varphi$	$\left(\frac{1}{r_0}\right)^2 (x^2 - y^2)$	
4	(2,0)	Defocus/Curvature $2(r r_0^{-1})^2 - 1$	$2\left(\frac{1}{r_0}\right)^2 (x^2 + y^2) - 1$	
5	(2,-2)	Astigmatism 0/90 $(r r_0^{-1})^2 \sin 2\varphi$	$\left(\frac{1}{r_0}\right)^2 2xy$	

Рис. 1. Вид нескольких первых базисных функций в тригонометрическом представлении

Аберрации волнового фронта низших порядков

Аберрации низшего порядка являются преобладающими оптическими aberrациями в оптической системе человеческого глаза. Они составляют примерно 90% от всех волновых aberrаций. Дефокусировка – положительная (дальнозоркость) или отрицательная (близорукость) - является доминирующими aberrациями, затем идет астигматизм (ортого-

нальный или косой). Коррекция aberrаций низшего порядка при помощи очков, контактных линз или лазерной хирургией роговицы в большинстве случаев значительно улучшает зрение.

Глаз также имеет хроматические aberrации. Они являются результатом дисперсии в оптических элементах с определенным показателем преломления. Длина оптического пути в системе глаза зависит от длины волны излучения. Таким образом, белый свет, попадающий в глаз, расщепляется в спектр цвета. Хроматическая aberrация - это просто сферическая рефракция, которая зависит от длины волны. Хроматические aberrации (дисперсии) традиционно делятся на продольные и поперечные. Первая из них характеризуется изменением осевой силы, и является относительно постоянной у разных людей. Поперечная хроматическая aberrация представляет собой сдвиг картинки по всей плоскости изображения с длиной волны и значительно варьируется между различными людьми. Хроматические aberrации, несомненно, ограничивают качество изображения сетчатки глаза, так как реальный мир, как правило, полихромный.

Дифракция является фундаментальным свойством волновой природы света, когда он проходит через отверстие. В глазе, дифракция – это взаимодействие между светом, проходящим через оптическую систему глаза и краем радужной оболочки глаза. Даже при отсутствии aberrаций разрешение любой оптической системы ограничено из-за дифракции на диафрагме. Изображение точки системой, которая ограничена только дифракцией, называется пятном Эйри.

Aberrации волнового фронта высших порядков

Развитие методов зондирования волнового фронта позволило получить точные и объективные измерения волновой aberrации глаза в клинических условиях.

Среди aberrаций высшего порядка в оптической системе глаза преобладают коматоподобные (вертикальная кома, горизонтальная кома, косой трилистник, горизонтальный трилистник) и сферические aberrации, которые являются aberrациями 3-го порядка. В общем, значения отдельных aberrации низшего порядка в нормальном глазу беспорядочно разбросаны вокруг нуля с двумя исключениями. Первое исключение относится к сферической aberrации, которая систематически смещена в сторону положительных значений. Вторым исключением является наклонный трилистник, который обычно имеет отрицательное значение.

Тем не менее, более высокие порядки по-прежнему могут оказать существенное негативное влияние на качество изображения, когда зрачок большой. Хорошо известно, что вклад aberrации высшего порядка в общую волновую aberrацию возрастает с увеличением размера зрачка; точнее, среднее увеличение с 3% до 14% при увеличении размера зрачка от 3,0 мм до 7,0 мм [8-9].

Численное моделирование разложения по базису функций Цернике

Разложение некоторых заданных полей по базису функций Цернике (1) выполнялось с помощью выражения (4). На Рис.2 показана амплитуда и фаза поля:

$$E(r, \varphi) = r \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp(i3\varphi) \quad (6)$$

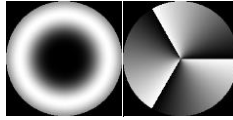


Рис. 2. Амплитуда и фаза поля (6)

На Рис. 3 показан график распределения коэффициентов разложения поля (6), из которого видно, какие aberrации в анализируемом поле присутствуют, и с каким весом. Наиболее ярко функция $\Psi_{3,3}$, описывающая aberrацию вида трилистниковый астигматизм.

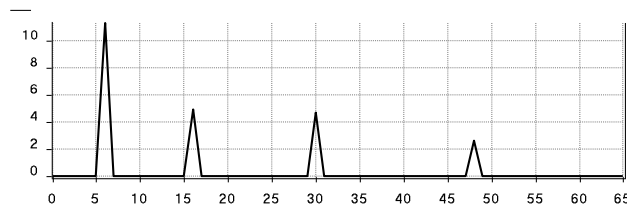


Рис. 3. График распределения коэффициентов разложения поля (6)

Как видно, ненулевыми являются коэффициенты только тех функций разложения, которые имеют в качестве меридионального индекса $m=3$. Это связано с согласованностью базиса Цернике с оптическими вихрями или угловыми гармониками [10-11]. Первый индекс (радиальный) в наборе базисных функций (1), имеющих ненулевые коэффициенты, связан с разложением амплитудной составляющей поля (6).

Ненулевые коэффициенты:

6: $n=3, m=3, \text{coef}=11.337,$

16: $n=5, m=3, \text{coef} = -4.920,$

30: $n=7, m=3, \text{coef}= 4.672,$

48: $n = 9, m=3, \text{coef}= -2.665.$

Аналогичным образом получены результаты для поля:

$$E(r, \varphi) = r \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp(i5\varphi) \quad (7)$$

На рис. 4 показана амплитуда и фаза этого поля.



Рис. 4. Амплитуда и фаза поля (7)

На Рис. 5 показан график распределения коэффициентов разложения поля (7), из которого видно, какие aberrации в анализируемом поле присутствуют и каким весом. Наиболее ярко выражена функция $\Psi_{5,5}$, описывающая aberrацию вида кома вдоль оси x и y.

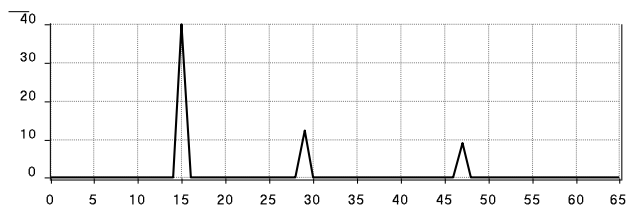


Рис.5. График распределения коэффициентов разложения поля (7)

Ненулевые коэффициенты:

15: $n=5, m=5, \text{coef} = 39.664,$

29: $n=7, m = 5, \text{coef} = 12.257,$

47: $n=9, m=5, \text{coef} = 8.899.$

Для поля:

$$E(r, \varphi) = r \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \exp(i10\varphi) \quad (8)$$

На рис. 6 показана амплитуда и фаза этого поля.

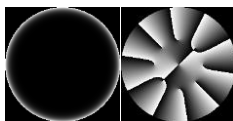


Рис. 6. Амплитуда и фаза поля (8)

На Рис. 7 показан график распределения коэффициентов разложения поля (8), из которого видно, какие aberrации в анализируемом поле присутствуют и каким весом. Наиболее ярко выражена функция $\Psi_{10,10}$, описывающая aberrацию вида кома вдоль оси x и y.

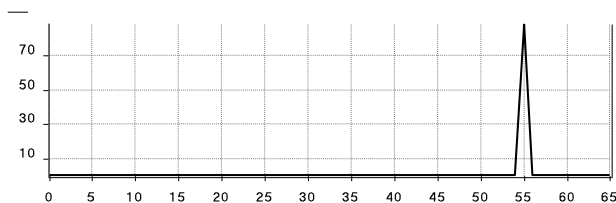


Рис. 7. График распределения коэффициентов разложения поля (7)

Один ненулевой коэффициент:

55: $n=10, m=10, \text{coef} = 88.618.$

Заметим, что для компенсации наиболее ярко выраженных aberrаций и следовательно, для того что бы убрать основное влияние искажений, выявленных при разложения поля по базису Цернике, достаточно создать поле, комплексно-сопряженное к выявленной

абберации. Такое поле можно создать методами дифракционной оптики [12], в том числе нанесением соответствующего дифракционного рельефа на поверхность линз.

Таким образом, показано, что анализ волнового фронта на основе разложения по базису Цернике облегчает диагностику в клинической офтальмологии [13-14].

Литература

1. Artal, P. Optics of the eye and its impact in vision: a tutorial / P. Artal // *Advances in Optics and Photonics*. – 2014. – Vol. 6. – P. 340-367.
2. Дегтярев, С.А. Влияние изменения кривизны преломляющих поверхностей глаза на качество изображения на сетчатке в модели Лиоу–Бреннана / Дегтярев С.А., Карсаков А.В., Бранчевская Е.С., Хонина С.Н., Котляр В.В. // *Компьютерная оптика*, 39(5), 702-708 (2015).
3. Liang, J. Objective measurement of the WA's aberration of the human eye with the use of a Hartmann-Shack sensor / J. Liang, B. Grimm, S. Goelz, J.F. Bille // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1994. – Vol. 11. – P. 1949-1957.
4. Khonina, S.N. Zernike phase spatial filter for measuring the aberrations of the optical structures of the eye / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, D.V. Kirsh // *Journal of Biomedical Photonics & Engineering*. – 2015. – Vol. 1, Issue 2. – P. 146-153.
5. Kotlyar, V.V. Coherent field phase retrieval using a phase Zernike filter / Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A., Wang Y., Zhao D. // *Компьютерная оптика*, 17, 43-48 (1997).
6. Koltlyar, V.V. Multi-order diffractive optical elements to process data, in Book "Perspectives in Engineering Optics" / Koltlyar V.V, Khonina S.N. // Ed. by K. Singh, V.K. Rastogi, Publ. Anita Publications, Delhi, 47-56 (2003).
7. Карпеев, С.В. Оптический анализ световых полей с помощью многопорядковых ДОО, согласованных с функциями Цернике / Карпеев С.В., Хонина С.Н. // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва*, №4(24), 202-214 (2010).
8. Guirao, A. Calculated impact of higher-order monochromatic aberrations on retinal image quality in a population of human eyes / Guirao A., Porter J, Williams DR, Cox IG // *J Opt Soc Am A* 2002; 19:1-9; erratum, 620-628.
9. Artal, P. Compensation of corneal aberrations by the internal optics in the human eye / Artal P., Guirao A, Berrio E, Williams DR // *J Vis* 2001; 1(1):1-8. Available at: <http://www.journalofvision.org/1/1/1/Artal-2001-jov-1-1-1.pdf>. Accessed November 12, 2009.
10. Soskin, M. S. "Singular optics," in *Progress in Optics* / M. S. Soskin, M. V. Vasnetov, E. Wolf // ed. (Elsevier, 2001), Vol. 42, pp. 219-276.
11. Kotlyar, V.V. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / Kotlyar, V.V., Khonina S.N., Soifer V.A. // *Journal of modern optics*, 45 (7), 1495-1506 (1998).
12. Головашкин, Д. Л. Дифракционная компьютерная оптика / Д. Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В. В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // под ред. В.А. Сойфера. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 736 с.
13. Lombardo, M. Wave aberration of human eyes and new descriptors of image optical quality and visual performance / Lombardo M., Lombardo.G // *J Cataract Refract Surg* 2010; 36:313-331.
14. Westheimer, G. Influence of ocular light scatter on the eye's optical performance / Westheimer G., Liang J. // *J Opt Soc Am A* 1995; 12:1417-1424.