Анализ влияния стимулирования на поведение больших социальных групп на основе игры Штакельберга

М.И. Гераськин[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Московское шоссе,34, 443086, Россия

Аннотация. Рассматривается проблема стимулирования социально-оптимального поведения больших социальных групп (агентов) на примере волонтерства. На основе теоретико-игровой модели с лидерством по Штакельбергу исследованы возможные варианты равновесий, т.е. оптимальных векторов действий социальных групп, в условиях асимметрии информированности. В случае линейной убывающей функции стимулирования и линейных функций издержек агентов доказаны условия равновесия по Нэшу в игре Штакельберга. Выведены аналитические формулы расчета равновесий при различных параметрах типа агентов, дифференцированных по склонности к альтруизму. На основе статистики распределения населения России по склонности к альтруизму проведено моделирование поведения социальных групп волонтеров.

1. Введение

Стимулирование в социальных системах используется для целенаправленного изменения моделей поведения социальных групп с помощью денежных выплат (стимулов), вычисляемых из условия оптимальности критериев, установленных органами управления этих систем. На уровне государства в современных условиях целью стимулирования все чаще является побуждение граждан к совершению действий, максимизирующих коллективную функцию полезности, называемых в дальнейшем социально-оптимальными действиями или волонтерством. Такое стимулирование обусловлено необходимостью преодоления тенденций индивидуального рационализма [1,2] и выражается в реализации национальных программ [3,4], направленных на развитие общественных ценностей, в том числе с использованием информационных систем [5].

Для практической реализации системы стимулирования были разработаны методики и алгоритмы [6,7], а также была сформулирована [8] теоретико-игровая модель поведения больших социальных групп (далее, агентов) в виде некооперативной игры. Модель базируется на компенсаторной линейно убывающей функции стимулирования, для которой доказаны [9-16] условия индивидуальной рациональности, эффективности по Парето и неманипулируемости.

Модель [8] выражает зависимость индивидуальной функции полезности гражданина от структуры распределения его располагаемого фонда времени и степени склонности к альтруизму, а также от цены социально-оптимального действия, т.е. стимула. Стимул, в свою очередь, вычисляется как убывающая функция от суммарного количества волонтерских действий, совершенных всеми гражданами. На основе оптимизации индивидуальных функций полезности всех граждан, модель позволяет рассчитывать в соответствующем периоде вектор социально-оптимальных действий, который является равновесием по Нэшу, т.е. удовлетворяет интересам всех участников общества. Модель учитывает также интересы государства (метаагента), нацеленного на рациональное увеличение волонтерских действий. Метаагент выбирает коэффициенты функции стимулирования так, что стимул, равный средней заработной плате, обеспечивает выделение на волонтерство не менее половины располагаемого фонда времени граждан.

На основе разработанной модели были выведены условия равновесия, а также получены формулы расчета вектора социально-оптимальных действий при условии, что социальные группы при выборе действий не учитывают поведение друг друга. Это условие в теории игр получило название гипотезы Курно [9] и выражает симметрию игроков вследствие априорной неинформированности игрока о действиях других игроков, называемых окружением. Однако в реальности одни социальные группы могут быть информированы об активности других социальных групп, что приводит к ситуации асимметрии информированности, следовательно, возникает асимметрия равновесия в игре. Игра больших социальных групп в случае асимметрии информированности, или модель игры Штакельберга [10], описывает поведение агентов, информированных об оптимальном выборе окружения; такие агенты становятся лидерами по Штакельбергу. В этом случае окружение имеет статус последователей, т.е. ведомых агентов, поведение которых описывается гипотезой Курно.

В дальнейшем статья структурирована следующим образом: описание системы стимулирования агентов согласно [8], анализ принципов выбора действий агентов в игре Штакельберга, исследование этапов процесса стратификации агентов на лидеров и последователей, формулировка модели установления равновесия, разработка аналитических формул вычисления равновесия в игре Штакельберга для больших социальных групп.

2. Методы

Мы рассматриваем как объект стимулирования социальную систему, например, граждан страны или служащих корпорации, которые подразделяются на *K* групп (агентов), отличающихся по какому-либо признаку, влияющему на эффективность стимулирования, который далее называется параметром типа агента. Другими словами, все индивиды, включенные в *k*-ю группу, будут иметь предсказуемую одинаковую реакцию на равные стимулы. Количество индивидов в каждой группе обозначено $n_k, k \in K$, символ *K* обозначает множество социальных групп, а также количество элементов этого множества.

Параметр типа агента определяется его альтруизмом, т.е. склонностью к благотворительности, и оценивается коэффициентом эластичности «благотворительного» времени по располагаемому фонду времени $\delta_{ak} \in [0,1]$. Агент оценивается как более склонный к альтруизму, если коэффициент δ_{ak} ближе к единице. Фактические значения коэффициента альтруизма агента оцениваются из следующей функции $a_k = D^{\delta_{ak}}, k \in K$, описывающей зависимость интервала времени социально-оптимальных действий a_k при отсутствии какого-либо стимулирования от располагаемого фонда времени *D*. На основе этой функции и с учетом статистики волонтерского времени коэффициент альтруизма вычисляется по следующей формуле

$$\delta_{ak}(a) = \frac{\ln a_k}{\ln D}, k \in K,\ \delta_{ak} > 0,1 \forall a_k > 1. \tag{1}$$

Система стимулирования включает в себя [6] подсистему регистрации действий a_k и подсистему выплаты стимулов, равных произведению цены стимула p_k на величину действия, т.е. $p_k(\mathbf{A})a_k$. Цена стимула рассчитывается на основе следующей функции стимулирования [7,8]:

$$p_a(\mathbf{A}) = b_1 - b_2 \sum_{k \in K} n_k a_k, k \in K, b_1, b_2 > 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}=\{a_k, k\in K\}$ – вектор социально-оптимальных действий; b_1, b_2 – постоянные коэффициенты, не зависящие от вектора **A** в текущем периоде, вычисляемые по формулам, зависящим от вектора $\mathbf{A}_0=\{a_{0k}, k\in K\}$ действий агентов в предыдущем периоде[1],

$$b_1 = p_d \frac{A_0}{A^D - A_0}, b_2 = \frac{p_d}{A^D - A_0}, A_0 = \sum_{k\in K} a_{0k}, A^D = \frac{D}{2}\sum_{k\in K} n_k\,, \tag{2a}$$

где p_d – цена (тарифная ставка) рабочего времени; $U(\bullet)$ – непрерывно-дифференцируемая функция полезности агента. Следует отметить, что коэффициенты b_1, b_2 вычисляются по формулам (2a), если фонд стимулирования не фиксирован, а орган управления (государство) нацелен на обеспечение баланса между рабочим и волонтерским временем. В случае фиксированного фонда стимулирования, равного F, коэффициенты функции стимулирования вычисляются по следующим формулам [7][2]:

$$b_1 = \frac{F - n\varphi^{\min}}{A_0}\left(1+\frac{n}{2}\right), b_2 = \frac{F - n\varphi^{\min}}{A_0^2}\frac{n}{2}, n = \sum_{k\in K} n_k\,, \tag{2b}$$

где $\varphi^{\min}$ – минимальный гарантированный стимул.

Эффективность системы стимулирования оценивается согласно следующей индивидуальной функции полезности агента:

$$U_k(a_k) = \left(p_a(\mathbf{A}) - p_d^{1-\delta_{ak}}\right)a_k, k\in K\,, \tag{3}$$

где $U(\bullet)$ – непрерывно-дифференцируемая функция полезности агента. Функция (3) выбрана на основе следующей гипотезы влияния склонности к альтруизму на поведение агента: рост склонности к альтруизму приводит к снижению полезности заработной платы.

Задача нахождения равновесного по Нэшу вектора **A** из условия максимума функции (3) при условии (2) в случае постоянства численности рассматриваемых социальных групп (т.е. $\frac{\partial n_k}{\partial a_k} = 0 \forall k\in K$) позволила получить следующую систему условий равновесия [8]:

$$b_1 - b_2\sum_{j\in K} n_j a_j - b_2 n_k a_k\left(1+\sum_{j\in K\setminus k}\rho_{kj}\right) - p_d^{1-\delta_{ak}} = 0, k\in K\,, \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{j\in K\setminus k}\rho_{kj} > -2\,, \tag{5}$$

---

[1] Формулы (2a) получены из следующих условий: 1) при низком уровне социально-оптимальных действий, равном A_0, орган управления устанавливает высокую цену стимула, равную средней заработной плате p_d; 2) если располагаемый фонд времени делится поровну между рабочим и «благотворительным» временем (т.е. $\frac{D}{2}$), то цена стимула равна нулю. При этих условиях система уравнений $b_1 - b_2 A^0 = p_d, b_1 - b_2 A^D = 0$ приводит к решению (2a).

[2] Формулы (2b) получены из формул [7] $b_1 = \frac{F - n\varphi^{\min}}{\sum_{k\in K} u_k}\frac{2\bar{u} + \sum_{k\in K} u_k}{2\bar{u}}, b_2 = \frac{F - n\varphi^{\min}}{2\bar{u}\sum_{k\in K} u_k}, \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{k\in K} u_k$, в результате следующих преобразований. В настоящей статье использована следующая нотация: $a_k = u_k$, $A_0 = \sum_{k\in K} u_k$, $\frac{A_0}{n} = \bar{u}$. Поэтому $b_1 = \frac{F - n\varphi^{\min}}{A_0}\frac{2A_0/n + A_0}{2A_0/n} = \frac{F - n\varphi^{\min}}{A_0}\left(1+\frac{n}{2}\right)$, $b_2 = \frac{F - n\varphi^{\min}}{2\frac{A_0}{n}A_0} = \frac{F - n\varphi^{\min}}{A_0^2}\frac{n}{2}$.

где $\rho_{kj} = \dfrac{\partial a_j}{\partial a_k}$ – предположительная вариация в уравнении *k*-го агента, т.е. предполагаемое изменение действия *j*-го агента в ответ на единичный прирост действия *k*-го агента.

Предположительная вариация количественно выражает влияние асимметрии информированности агентов на результирующее равновесие, т.е. на вектор действий $\mathbf{A}^*$, который является решением системы (4). Символ «*» обозначает равновесные значения параметров. В случае игры Курно, когда $\rho_{kj} = 0 \forall j, k \in K$, все агенты симметрично не изменяют выбранные действия в ответ на действия окружения, поэтому несимметричность результирующего равновесия [8] зависит только от дифференциации агентов по типу. Далее мы рассматриваем случай игры Штакельберга $\rho_{kj} \neq 0 \forall j, k \in K$, при котором некоторые агенты (лидеры) могут выбирать действия с учетом принципов выбора действий другими агентами (последователями), что является еще одной причиной несимметричности результирующего равновесия. Поэтому ниже исследуются решения системы уравнений (4) в случае $\rho_{kj} \neq 0 \forall j, k \in K$.

3. Результаты и обсуждение

Введем следующие обозначения: $q_k = n_k a_k$ – суммарное действие *k*-й социальной группы; $q_{-k} = n_{-k} a_{-k}$ – суммарное действие окружения *k*-й социальной группы, т.е. всех агентов, не входящих в *k*-ю группу; $q = \sum_{k \in K} q_k$ – суммарное действие всех агентов системы. В этом случае систему уравнений (4) можно преобразовать следующим образом:

$$b_1 - b_2\left(q_k + q_{-k}\right) - b_2 q_k \left(1 + \sum_{j \in K \setminus k} \rho_{kj}\right) - p_d^{1-\delta_{ak}} = 0,$$

$$\frac{b_1}{b_2} - 2q_k - q_{-k} - q_k \sum_{j \in K \setminus k} \rho_{kj} - \frac{p_d^{1-\delta_{ak}}}{b_2} = 0,$$

$$2q_k + q_k \sum_{j \in K \setminus k} \rho_{kj} + q_{-k} - \frac{b_1 - p_d^{1-\delta_{ak}}}{b_2} = 0,$$

и записать в следующем результирующем виде:

$$f_k\left(q_k, q\right) = q_k \left(2 + \sum_{j \in K \setminus k} \rho_{kj}\right) + q_{-k} - \alpha_k = 0, k \in K, \tag{6}$$

где $\alpha_k = \dfrac{b_1 - p_d^{1-\delta_{ak}}}{b_2}$. Функцию $f_k\left(q_k, q\right)$ принято называть функцией реакции *k*-го агента, поскольку она выражает неявно зависимость оптимального действия *k*-го агента от действий окружения. Рассмотрим социальную систему, состоящую из *двух агентов*, на примере которой описывается процесс возникновения лидера:

$$\begin{cases} f_1\left(q_1, q\right) = q_1\left(2 + \rho_{12}\right) + q_2 - \alpha_1 = 0, \\ f_2\left(q_2, q\right) = q_2\left(2 + \rho_{21}\right) + q_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Функции реакции можно выразить в явном виде из системы (7) следующим образом:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\alpha_1 - q_2}{2 + \rho_{12}}, \\ q_2 = \dfrac{\alpha_2 - q_1}{2 + \rho_{21}}. \end{cases} \tag{8}$$

Если второй агент не информирован о функции реакции первого агента, то в соответствии с гипотезой Курно, во втором уравнении системы (8) предположительная вариация равна нулю (т.е., $\rho_{21} = 0$), поэтому это уравнение можно записать в виде:

$$q_{2(F)} = \frac{\alpha_2 - q_1}{2}. \tag{8a}$$

В формуле (8а) введен индекс F для второго агента, поскольку согласно принятому предположению, он является последователем (follower). Если в то же время первый агент информирован о функции реакции второго агента вида (8а), то он может вычислить предположительную вариацию ρ_{12} следующим образом:

$$\rho_{12} = \frac{\partial a_2}{\partial a_1} = \frac{\partial \left({q_2}/{n_2} \right)}{\partial \left({q_1}/{n_1} \right)} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{n_1}{2n_2}, \tag{9}$$

где учитывается следующее соотношение: $a_k = \dfrac{q_k}{n_k}$. Подставив формулу (9) в первое уравнение системы (8), получим явную функцию реакции второго агента:

$$q_{1(L)} = \frac{\alpha_1 - q_2}{2 - \dfrac{n_1}{2n_2}}. \tag{10}$$

В формуле (10) введен индекс «L» для первого агента, поскольку согласно принятому предположению, он является лидером (leader).

С учетом введенных обозначений и проведенных преобразований, запишем систему реакций (8) *в случае лидерства первого агента* следующим образом:

$$\begin{cases} q_L = \dfrac{\alpha_L - q_F}{2 - \dfrac{n_L}{2n_F}}, \\ q_F = \dfrac{\alpha_F - q_L}{2}. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, процесс стратификации агентов социальной системы на лидеров и последователей протекает в соответствии с последовательностью, представленной на рис. 1.

Поскольку равновесный вектор действий $\left(q_L^*, q_F^*\right)$ в рассматриваемой социальной системе определяется как точка пересечения реакций (11) на плоскости q_L, q_F, то соотношение равновесных действий $\dfrac{q_L^*}{q_F^*}$ зависит от соотношения углов наклона и свободных членов реакций (11). Анализ реакций (11), который иллюстрирует рис. 2, позволяет исследовать влияние параметров состояния социальной системы на соотношение равновесных действий.

Введем относительные индикаторы параметров состояния системы: соотношение численности социальных групп лидеров и последователей η, соотношение коэффициентов системы уравнений (6) β, соотношение параметров типа агентов μ. Эти индикаторы вычисляются по следующим формулам:

$$\eta = \frac{n_L}{n_F}, \beta = \frac{\alpha_L}{\alpha_F}, \mu = \frac{\delta_{aL}}{\delta_{aF}}. \tag{12}$$

С учетом этих обозначений, решение системы реакций (11) позволяет записать следующие выражения координат вектора равновесия Штакельберга:

$$\begin{cases} q_L^* = \dfrac{2\alpha_L - \alpha_F}{3 - \eta}, \\ q_F^* = \dfrac{\left(2 - \dfrac{\eta}{2}\right)\alpha_F - \alpha_L}{3 - \eta}. \end{cases} \tag{13}$$

Вектор равновесия Штакельберга обозначен на рис. 2 точкой E_S в отличие от вектора равновесия Курно, который обозначен точкой E_K.

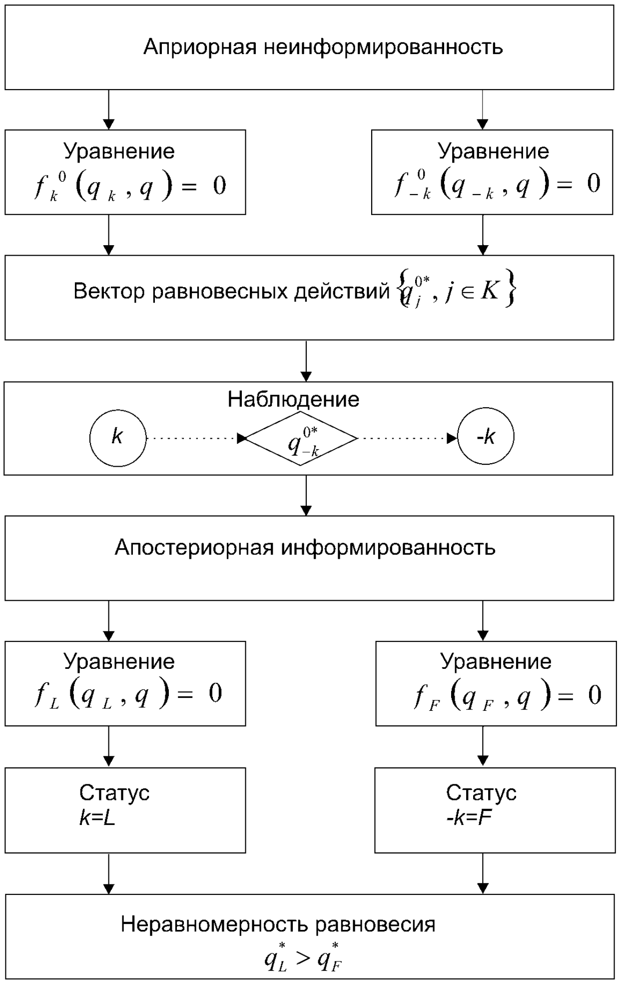

Рисунок 1. Схема процесса стратификации агентов социальной системы.

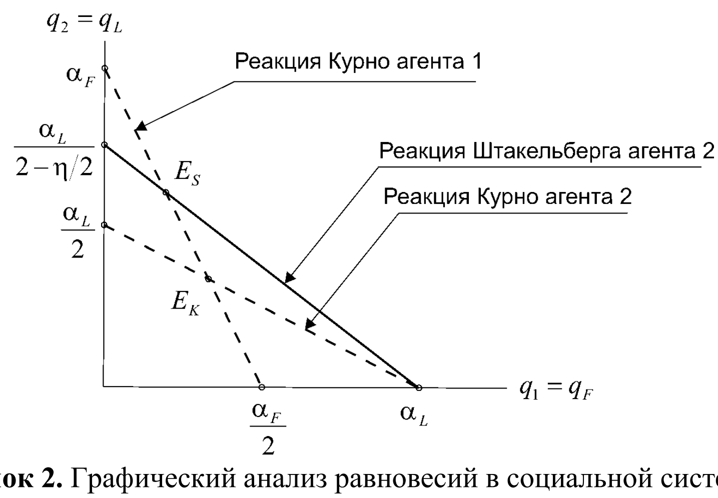

Рисунок 2. Графический анализ равновесий в социальной системе.

В следующем утверждении, доказательство которого размещено в приложении, определены условия существования равновесия в системе.

Утверждение 1. В социальной системе существует равновесие, т.е. равновесные действия неотрицательны $q_L^* \geq 0 \wedge q_F^* \geq 0$*, если выполняется следующие условия*:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le \beta \le 2 - \frac{\eta}{2} \, \forall \eta < 3, \\ \frac{1}{2} \ge \beta \ge 2 - \frac{\eta}{2} \, \forall \eta > 3, \end{cases} \tag{14}$$

а если существует аппроксимирующая функция следующего вида $\beta = \mu^{\gamma}, 0 < \gamma << 1$*, то условия (14) имеют вид:*

$$\begin{cases} e^{\frac{\ln 0,5}{\gamma}} \le \mu \le e^{\frac{\ln(2-0,5\eta)}{\gamma}} \, \forall \eta < 3, \\ e^{\frac{\ln 0,5}{\gamma}} \ge \mu \ge e^{\frac{\ln(2-0,5\eta)}{\gamma}} \, \forall \eta > 3. \end{cases} \tag{14a}$$

Различные варианты аппроксимирующей функции $\beta = \mu^{\gamma}$ исследованы на рис. 3. При $p_d \ge 100$ и $\frac{b_1}{p_d} \ge 1{,}1$, показатель степени имеет следующее ограничение $\gamma \le 0{,}3$.

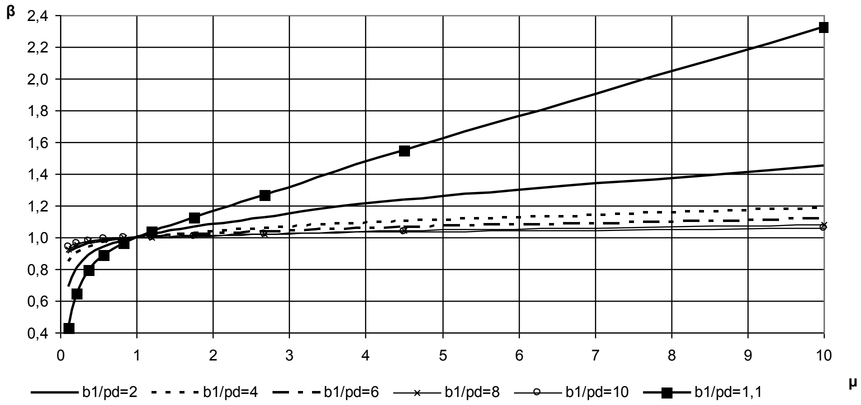

Рисунок 3. Анализ аппроксимирующей функции $\beta = \mu^{\gamma}$.

На основе утверждения 1 можно сделать практический вывод, сформулированный следующим образом.

Следствие 1: для существования равновесия в социальной системе численность группы лидеров не должна превышать численность группы последователей более чем в 4 раза.

Введем индикатор неравномерности равновесных действий ξ^*, который определяется по следующей формуле:

$$\xi^* = \frac{q_L^*}{q_F^*}. \tag{15}$$

В следующем утверждении, доказательство которого размещено в приложении, оценено влияние соотношения параметров состояния социальной системы на неравномерность равновесных действий.

Утверждение 2. В социальной системе увеличение соотношения численности социальных групп лидеров и последователей η *повышает (понижает) неравномерность равновесных действий* ξ^* *при данном значении* β *по следующему правилу:*

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial \eta} \begin{cases} > 0 \forall \beta > 0,5, \\ < 0 \forall \beta < 0,5; \end{cases}. \tag{16a}$$

увеличение соотношения β *повышает (понижает) неравномерность равновесных действий* ξ^* *при данном значении* η *по следующему правилу:*

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial \beta} \begin{cases} > 0 \forall \eta < 3, \\ < 0 \forall \eta > 3; \end{cases}. \tag{16b}$$

увеличение фактора η *больше (меньше) влияет на изменение неравномерности равновесных действий* ξ^*, *чем увеличение фактора* β, *при следующих условиях:*

$$\left|\frac{\partial\xi^*}{\partial\eta}\right| \begin{cases} > \left|\dfrac{\partial\xi^*}{\partial\beta}\right| \ \textit{если} \ \dfrac{|2\beta-1|}{2} > |3-\eta|, \\ < \left|\dfrac{\partial\xi^*}{\partial\beta}\right| \ \textit{если} \ \dfrac{|2\beta-1|}{2} > |3-\eta|. \end{cases} \tag{16c}$$

На основе утверждения 2 сформулируем следующие практические выводы.

Следствие 2. В социальной системе

1) при условиях $p_d \geq 100$ *и* $\dfrac{b_1}{p_d} \geq 1{,}1$, *увеличение численности группы лидеров* n_L *по сравнению с численностью группы последователей* n_F *обусловливает рост неравномерности равновесных действий в сторону лидеров, если склонность к альтруизму последователей превышает этот показатель лидеров более чем в 10 раз, т.е.* $\mu > 0{,}1$*;*

2) *увеличение склонности к альтруизму лидеров* δ_L *по сравнению с этим показателем последователей* δ_F *обусловливает рост неравномерности равновесных действий в сторону лидеров, если численность группы последователей более чем в 3 раза превышает численность группы лидеров.*

Моделирование равновесия (14) и показателей чувствительности неравномерности равновесия (16) проведем на примере социальных групп волонтеров России, численность которых в 2016 году была равна 1,435 млн. человек, или около 1% населения[1]. В статье [8] был проведен анализ структуры волонтеров, разделенных на 9 групп согласно склонности к альтруизму. В исследуемом случае мы разделим волонтеров на 2 группы, для которых рассчитаны параметры типа (табл. 1) при следующих значениях постоянных: D=112 часов в неделю, $p_d = 240$ руб. в час. Во вторую группу объединены группы 2-9 из статьи [8], численность которых по отдельности мала по сравнению с первой группой; *вторая группа* населения рассматривается как *лидеры*. Коэффициенты функции стимулирования, рассчитанные по формулам (2а), равны: $b_1 = 284, b_2 = 0{,}0035$. Соотношение численности групп лидеров и последователей, рассчитанное по формуле (12), равно η=0,44.

Таблица 1 Характеристики социальных групп волонтеров в 2016 г.

Параметр	Всего	Группы 1	Группы 2
Численность населения n_k, тыс. чел.	1435	997	438
Средняя продолжительность волонтерских действий в неделю a_k, час	8,64	2,35	23,0
Сумма волонтерских действий в неделю A_0, тыс. часов	12398	2343	10055
Склонность к альтруизму δ_{ak}		0,18	0,66
Параметр типа α		55168	80360

В рассматриваемой системе равновесие Курно при условии равенства численности социальных групп (т.е. при η=1) смещено в сторону второго агента, имеющего более высокую склонность к альтруизму (рис. 4). Равновесие Штакельберга при η=1 приводит к еще большей неравномерности в пользу второго агента как лидера, а при η=0,44 данное равновесие,

[1] Труд и занятость в России 2017: Стат . Сб ./Росстат М., 2017. 261 с. http://www.gks.ru/free_doc/doc_2017/trud_2017.pdf

наоборот, сдвигается в сторону первого агента, группа которого имеет превалирующую численность. Во всех этих случаях суммарное равновесное действие существенно превышает фактический показатель A_0 (табл. 1) , что обусловлено действием стимулирования.

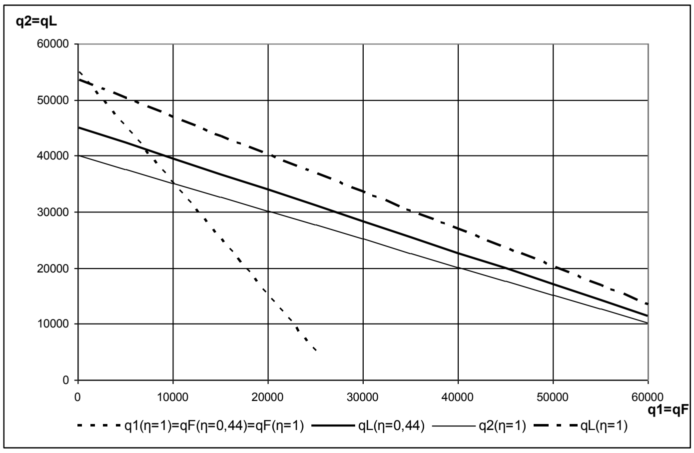

Рисунок 4. Анализ равновесия Курно и равновесия Штаельберга.

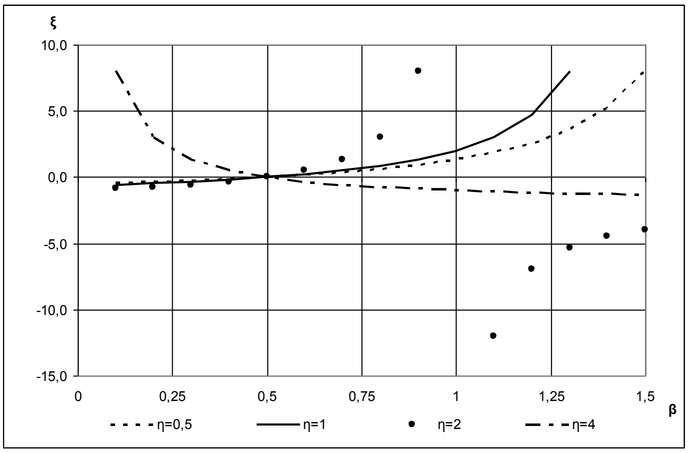

Рисунок 5. Анализ чувствительности равновесия Штакельберга к параметрам состояния.

Рис. 5 иллюстрирует свойства (16) равновесий Штакельберга. С ростом соотношения численности социальных групп лидеров и последователей η, согласно условиям (16a), в случае $\beta < 0{,}5$ неравномерность равновесных действий ξ^* возрастает, а в случае $\beta > 0{,}5$ параметр ξ^* уменьшается. Согласно условиям (16b), в случае η<3, увеличение параметра β вызывает рост неравномерности равновесных действий ξ^*, а в случае η>3, это приводит к снижению параметра ξ^*. Значения параметра ξ^* в отрицательной полуплоскости соответствуют случаю несуществования равновесия согласно условиям (14) в случае η<3 при $\beta < 0{,}5$ или при $\beta > 2 - \frac{\eta}{2}$, и в случае η>3 при $\beta > 0{,}5$.

4. Заключение

Исследование теоретико-игровой модели поведения социальных групп волонтеров в рамках игры Штакельберга приводит к следующим выводам. Во-первых, равновесие в социальной системе существует, если численность группы лидеров не превышает численность группы последователей более чем в 4 раза. Во-вторых, в реальных условиях увеличение численности группы лидеров по сравнению с численностью группы последователей обусловливает рост неравномерности равновесных действий в сторону лидеров, если склонность к альтруизму последователей превышает этот показатель лидеров более чем в 10 раз. В-третьих, увеличение склонности к альтруизму лидеров по сравнению с этим показателем последователей обусловливает рост неравномерности равновесных действий в сторону лидеров, если численность группы последователей более чем в 3 раза превышает численность группы лидеров.

5. Приложение

Доказательство утверждения 1. Равновесие (13) существует в первом ортанте, если $q_L^* = \frac{2\alpha_L - \alpha_F}{3-\eta} \ge 0 \wedge q_F^* = \frac{\left(2-\frac{\eta}{2}\right)\alpha_F - \alpha_L}{3-\eta} \ge 0$; тогда с учетом (12) можно записать следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le \beta \le 2 - \frac{\eta}{2} \; \forall \eta < 3, \\ \frac{1}{2} \ge \beta \ge 2 - \frac{\eta}{2} \; \forall \eta > 3. \end{cases} \tag{A1}$$

Соотношение $\beta = \frac{\alpha_L}{\alpha_F}$ с учетом нотации (6) связано с соотношением параметров типа агентов следующим образом:

$$\beta = \frac{b_1 - p_d^{1-\delta_{aL}}}{b_1 - p_d^{1-\delta_{aF}}}. \tag{A2}$$

Соотношение (A2) является зависимостью от соотношения $\mu = \frac{\delta_{aL}}{\delta_{aF}}$. Учитывая, что $b_1 > p_d$ согласно (2a), а также поскольку $\mu \in [0{,}1;10]$ с учетом (1), зависимость (A2), как показывает численный эксперимент на рис. 3, можно аппроксимировать следующей функцией:

$$\beta = \mu^{\gamma} \forall \mu \in [0{,}1;10], 0 < \gamma << 1. \tag{A3}$$

В случае аппроксимации (A3) неравенства (A1) можно записать в виде (14a).

Доказательство следствия 1. Из формул (13) следует, что при η=3 равновесие не определено. Из формул (14a) следует, что $2 - \frac{\eta}{2} > 0$, поскольку функция логарифма определена только при положительном подлогарифмическом выражении. Поэтому есть ограничение $\eta < 4$.

Доказательство утверждения 2. Подстановка формул (14) в формулу (15) и преобразование с учетом формул (12) позволяет получить следующее выражение:

$$\xi^* = \frac{q_L^*}{q_F^*} = \frac{2\alpha_L - \alpha_F}{\left(2-\frac{\eta}{2}\right)\alpha_F - \alpha_L} = \frac{2\frac{\alpha_L}{\alpha_F} - 1}{2 - \frac{\eta}{2} - \frac{\alpha_L}{\alpha_F}} = \frac{2\beta - 1}{2 - \frac{\eta}{2} - \beta}. \tag{A4}$$

Дифференцирование (A4) по η приводит к выражению $\frac{\partial \xi^*}{\partial \eta} = \frac{2\beta - 1}{2\left(2 - \frac{\eta}{2} - \beta\right)^2}$, из которого следует неравенство (16a). Дифференцирование (A4) по β приводит к выражению $\frac{\partial \xi^*}{\partial \beta} = \frac{3-\eta}{\left(2 - \frac{\eta}{2} - \beta\right)^2}$, из которого следует неравенство (16b). Сравнение модулей этих выражений показывает, что $\left|\frac{\partial \xi^*}{\partial \eta}\right| > \left|\frac{\partial \xi^*}{\partial \beta}\right|$, если $\frac{|2\beta - 1|}{2} > |3-\eta|$, поэтому можно записать условия (16c).

Доказательство следствия 2. Как показывает анализ аппроксимирующей функции $\beta = \mu^{\gamma}$ (рис. 3), при $p_d \geq 100$ и $\dfrac{b_1}{p_d} \geq 1{,}1$ есть ограничение $\gamma \leq 0{,}3$. Сравнение неравенств (14) и (14a) приводит к выводу, что $\begin{cases} \beta \geq 0{,}5 \Leftrightarrow \mu \geq e^{\frac{\ln 0{,}5}{\gamma}} \ \forall \eta < 3, \\ \beta \leq 0{,}5 \Leftrightarrow \mu \leq e^{\frac{\ln 0{,}5}{\gamma}} \ \forall \eta > 3. \end{cases}$ Поскольку $e^{\frac{\ln 0{,}5}{0{,}3}} = 0{,}1$, то из формулы (16a) следует, что $\dfrac{\partial \xi^*}{\partial \eta} \begin{cases} > 0 \forall \mu > 0{,}1, \\ < 0 \forall \mu < 0{,}1, \end{cases}$ т.е. первая часть следствия верна. Вторая часть следствия выводится из формулы (16b), в которой можно заменить $\dfrac{\partial \xi^*}{\partial \beta}$ на $\dfrac{\partial \xi^*}{\partial \mu}$, поскольку если $\dfrac{\partial \xi^*}{\partial \beta} > 0$, то $\dfrac{\partial \xi^*}{\partial \mu} > 0$.

6. Литература

[1] Roland, G. Transition and Economics. Politics, Markets, and Firms / G. Roland – Cambridge: MIT Press, 2000. – 840 p.

[2] Braguinsky, S. Incentives and Institutions. Transition to a Market Economy in Russia / S. Braguinsky, G. Yavlinsky – Princeton – NJ.: Princeton University Press, 2000. – 420 p.

[3] Постановление Правительства РФ от 30.12.2015 N 1493 "О государственной программе "Патриотическое воспитание граждан Российской Федерации на 2016 - 2020 годы".

[4] Распоряжение Правительства РФ от 27 декабря 2012 г. N 2567-р «О государственной программе Российской Федерации "Развитие культуры и туризма" на 2013 - 2020 годы».

[5] Постановление Правительства РФ от 15.04.2014 N 313 (ред. от 21.10.2016) "Об утверждении государственной программы Российской Федерации "Информационное общество (2011 - 2020 годы)".

[6] Гераськин, М.И. Алгоритмы информационной системы стимулирования социально-оптимальных действий граждан России // Сборник трудов III международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ) – Самара: Новая техника, 2017. – С. 1817-1825.

[7] Гераськин, М.И. Анализ влияния альтруистичности населения на эффективность системы стимулирования социально-оптимальных действий // Сборник трудов IV международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ) – Самара: Новая техника, 2018. – С. 2780-2791.

[8] Гераськин, М.И. Теоретико-игровая модель поведения больших социальных групп при стимулировании волонтерства // Сборник трудов V международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ) – Самара: Новая техника, 2019. – С. 17-24.

[9] Бурков, В.Н. Конкурсные механизмы в задачах распределения ограниченных ресурсов / В.Н. Бурков, Б. Данев, А.К. Еналеев, Т.Б. Нанева, Л.Д.Подвальный, Б.С. Юсупов // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 11. – С. 142-153.

[10] Бурков, В.Н. Коалиции при конкурсном механизме распределения ресурсов / В.Н. Бурков, А.К. Еналеев, В.Ф. Каленчук // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 12. – С. 81-90.

[11] Бурков, В.Н. Синтез оптимальных механизмов планирования и стимулирования в активной системе / В.Н. Бурков, А.К. Еналеев, Ю.Г. Лавров // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 10. – С. 113-120.

[12] Бурков, В.Н. Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы / В.Н. Бурков, М.Б. Искаков, Н.А. Коргин // Проблемы управления. – 2008. – № 4. – С. 38-47.
[13] Коргин, Н.А. Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов / Н.А. Коргин // Управление большими системами. – 2009. – Т. 26, № 1. – С. 319-347.
[14] Бурков, В.Н. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике / В.Н. Бурков, И.И. Горгидзе, Д.А. Новиков, Б.С. Юсупов – Москва: ИПУ РАН, 1997. – 356 с.
[15] Коргин, Н.А. Анализ реализуемости результатов многокритериальной экспертизы - применение "свойства пересечения" / Н.А. Коргин // Проблемы управления. – 2009. – № 6. – С. 18-27.
[16] Бурков, В.Н. Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами / В.Н. Бурков, Н.А. Коргин, Д.А. Новиков // Проблемы управления. – 2016. – № 5. – С. 14-23.
[17] Cournot, A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth – London: Hafner, 1960.
[18] Stackelberg, H. Market Structure and Equilibrium – English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011.

Analysis of the stimulation influence on wide social groups' behavior based on the Stackelberg game

M.I. Geraskin[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The problem of stimulation the socially optimal behavior of wide social groups (agents) is considered on the example of volunteering. Based on the game-theoretic model with the Stackelberg leadership, possible equilibrium variants are investigated, i.e., the optimal action vectors of social groups, in conditions of asymmetry of awareness. In the case of a linear decreasing function of incentives and linear cost functions of agents, the Nash equilibrium conditions in the Stackelberg game are proved. Analytical formulas for calculating the equilibria for various type parameters of agents, differentiated by their tendency to altruism, are derived. On the basis of statistics on the distribution of the population of Russia by their tendency to altruism, the behavior of social groups of volunteers is modeled.