

## Аналитическое и численное моделирование образования кластеров объектов в случайной среде

Я.А. Мостовой<sup>1</sup>, В.А. Бердников<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Рассматривается решение задачи зондирования некоторой зоны роем случайно распределенных объектов. Для этого требуется изучение статистических особенностей образования кластеров из равномерно распределенных объектов роя с целью поиска такой концентрации объектов в зоне зондирования, при которой количество случайных кластеров будет максимально. Получены соответствующие аналитические зависимости.

### 1. Введение

Одним из самых быстро развивающихся направлений робототехники на сегодняшний день является групповая робототехника подвижных объектов (или робототехника роя) [11, 12, 14, 16, 17, 20]. Рой роботов, по сравнению с обычным одиночным роботом, имеет ряд преимуществ, наиболее значимые из которых:

- большие быстродействие и радиус действия за счет распределения роя по всей территории зоны обслуживания;
- высокая вероятность выполнения поставленного задания за счет возможности перераспределения целей и замены вышедшего из строя робота другим из роя;
- разнообразие вариантов достижения целей за счет перераспределения ролей между объектами роя;
- простота решаемых роботом задач при взаимодействии с множеством таких же объектов роя позволяет решать достаточно сложные вычислительные задачи.

Некоторые задачи роевой робототехники сводятся к задачам теории перколяции в частности к поиску оптимальной концентрации объектов для реализации двухфазных операций [2, 3, 4, 5].

Классическая теория перколяции рассматривает матрицу со случайным заполнением, как модель случайной операционной среды в прямой геометрической интерпретации [1, 13, 22, 23]. В этой квадратной матрице с числом строк  $L$  случайная часть ячеек «черная», проводящая поток жидкости или газа, транспортный поток или информационный поток, а остальные ячейки – «белые», не проводящие поток. При росте концентрации (вероятности появления) черных ячеек некоторые из них случайным образом начинают соприкасаться ребрами и сливаться. Соприкасающиеся ребрами «черные» ячейки образуют случайные проводящие кластеры, которые образуются и растут вместе с ростом концентрации «черных» ячеек [1, 6].

В классической теории перколяции [1, 6, 18, 22, 23] ищется концентрация «черных» ячеек  $p_p$  – порог стохастической перколяции, при которой образуется сквозной случайный маршрут по «черным» ячейкам через всю матрицу в заданном направлении – стохастический

перколяционный кластер. Однако стохастический перколяционный кластер имеет рыхлую структуру, множество мертвых ветвей и явно избыточен с точки зрения решения многих практических задач.

При реализации программируемой перколяции [2, 3, 4, 5] на первой фазе создаётся стохастическая основа из распределенных случайным образом объектов при значениях их концентрации гораздо ниже порога стохастической перколяции, а на второй фазе строится сквозной перколяционный маршрут за счет внедрения (установки) дополнительных объектов в имеющиеся межкластерные интервалы. При этом концентрация стохастической основы выбирается таким образом, чтобы суммарные затраты на двухфазную операцию были минимальны.

Обнаруженная в результате численного статистического моделирования характерная зависимость среднего числа образующихся кластеров от концентрации с максимальным значением при концентрации в районе 0.25 физически объяснима: при дальнейшем росте концентрации кластеры растут и начинают активно объединяться при этом их количество падает

Поскольку концентрация объектов, при которой число кластеров имеет максимум, важна для проведения оптимальных с точки зрения затрат упомянутых двухфазных операций в ряде прикладных задач, необходимо аналитическое определение точного значения этого статистического феномена процесса образования кластеров на матрицах со случайным заполнением.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается рой роботов. Каждый робот может взаимодействовать с соседним для решения некоторого элемента глобальной задачи. Максимальное количество кластеров в рое объектов позволяет их легко коммутировать и объединять для совместного решения задач в нужном месте зоны обслуживания. Это место может назначаться оперативно [2, 3, 4, 5, 24].

Рассмотрим следующую задачу для роя размера  $S = Np_{max}$ , где  $N$  – это число ячеек перколяционной матрицы ( $N = l_1 l_2$ ),  $p_{max}$  – концентрация, при которой количество кластеров максимально:

При какой концентрации (вероятности нахождения в ячейке объекта) объектов на перколяционной матрице с числом ячеек  $N$  количество кластеров будет максимальным?

Чтобы ответить на этот вопрос введем специальную функцию  $M(p)$ , которая будет рассматривать зависимость среднего количества кластеров от концентрации  $p$ .

## 3. Аналитическое решение задачи поиска максимального числа кластеров роя

Рассмотрим кластер, состоящий из одного элемента. Такой кластер может существовать только в том случае, если одна ячейка перколяционной матрицы с вероятностью  $p$  окажется черной, а соседние с ней будут белыми [1, 6], чтобы обеспечить независимость кластера и сохранить его от слияния во время «посева» на матрице (создание стохастической основы [1, 2, 3, 4, 5]). Т.е. подобный кластер можно представить так:  $p(1-p)^4$ . Для кластера из двух ячеек подобные рассуждения «вернут» следующую форму:  $p^2(1-p)^6$ . Кластер из трех ячеек будет иметь вид  $p^3(1-p)^7$  или  $p^3(1-p)^8$ , т.к. может быть либо в форме «уголка» (число пустых соседей равно 7), либо «линии» (число пустых соседей равно 8). Продолжая увеличивать количество ячеек в кластере, индуктивно получим, что для некоторого числа  $s$  ячеек форма кластера будет иметь следующий вид [1, 6]:

$$p^s(1-p)^t \tag{1}$$

где  $p$  – концентрация,  $s$  – количество ячеек, из которых состоит кластер,  $t$  – необходимое количество пустых (белых) ячеек вокруг кластера.

Рассмотрим возможные виды и количество возникающих на матрице со случайным заполнением кластеров. Так кластер из двух ячеек может быть как вертикальной «линией», так и горизонтальной. Кластер из трех ячеек в виде «уголка» на матрице может быть расположен в четырех позициях, случай с кластером из трех ячеек в виде «линии» аналогичен кластеру из

двух ячеек. Т.е. среднее количество кластеров из трех ячеек есть выражение вида  $4p^3(1 - p)^7 + 2p^3(1 - p)^8$  [6]. Развивая эти рассуждения (представлены в работе у Ю.Ю. Тараскевича [6]), получим формулу для среднего количества кластеров на матрице бесконечного размера:

$$\sum_{t=t_{min_s}}^{t_{max_s}} g_{st} p^s (1 - p)^t \tag{2}$$

где  $t_{min}$  – минимальное количество пустых соседних ячеек,  $t_{max}$  – максимальное количество пустых соседних ячеек,  $g_{st}$  – количество различных кластеров, которые можно получить из  $s$  ячеек и  $s$   $t$  пустыми соседними ячейками.

$$t_{min_s} = \lceil 4\sqrt{s} \rceil \tag{3}$$

$$t_{max_s} = 2s + 2 \tag{4}$$

При увеличении количества ячеек  $s$  геометрическая длина и/или ширина кластера будет приближаться к длине и/или ширине матрицы соответственно. Когда-нибудь настанет момент, когда какой-то из этих параметров совпадет. Тогда последующий рост количества кластеров по длине и/или ширине будет на матрице площади  $N$  ( $N = l_1 l_2$ ) невозможен, т.е. необходимо ограничить по  $N$  параметр  $g_{st}$ .

Тогда среднее количество кластеров из  $s$  элементов на матрице с количеством ячеек  $N$  будет равно:

$$\sum_{t=t_{min_s}}^{t_{max_s}} g_{stN} p^s (1 - p)^t \tag{5}$$

Общее количество кластеров на матрице с количеством ячеек  $N$ :

$$M(p) = \sum_{s=1}^{s=N} \sum_{t=t_{min_s}}^{t_{max_s}} g_{stN} p^s (1 - p)^t \tag{6}$$

где  $M(p)$  – и есть искомая функция среднего количества кластеров.

Тогда концентрация максимального количества кластеров – это концентрация, при которой наступает максимальное значение функции  $M(p)$ .

Представим функцию  $M(p)$  в следующем виде:

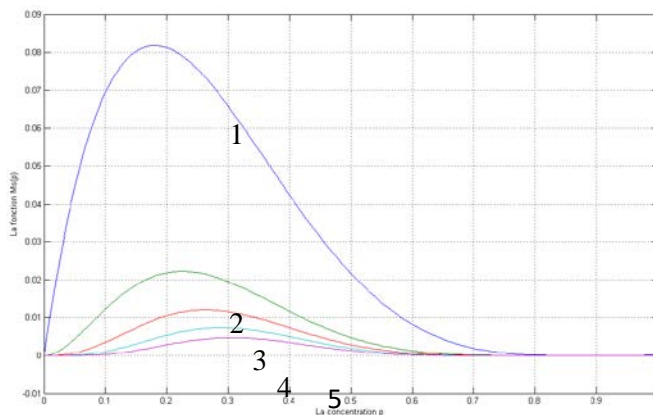
$$M(p) = \sum_{s=1}^{s=N} M_s(p) \tag{7}$$

Ввиду большого количества коэффициентов  $M_s(p)$  и отсутствия аналитического выражения для параметра  $g_{stN}$  (этот параметр можно определить только перебором всех возможных кластеров с фиксированными параметрами  $s$  и  $t$ , что представляет собой сложную вычислительную задачу) попробуем аппроксимировать эту функцию другой, более простой для исследования.

Также из-за знания ограниченного количества параметров  $g_{stN}$  представляет интерес провести исследование отношений коэффициентов  $M_s(p)$  друг относительно друга. Для этого зафиксируем любое  $p$  от 0 до 1, например  $p = p^*$ , и посмотрим на поведение сумм  $M_s(p)$ , а именно: постараемся определить, какое  $s$  вносит наибольший вклад в результирующую сумму  $M(p)$ . Доказательство этого факта представлено в приложении А.

В результате получим, что  $M_{s=k}(p) > M_{s=k+1}(p)$  и в  $M(p)$  вносят основной вклад лишь несколько первых слагаемых. Внешний вид слагаемых  $M_s(p)$  представлен на рисунке 1.

Легко также установить, что  $\int_0^1 M_{s=k}(p) dp > \int_0^1 M_{s=k+1}(p) dp$ . Для этого посчитаем для каждого  $p$   $M_{s=k}(p)$  и  $M_{s=k+1}(p)$  и просуммируем их, получив интегралы от  $M_{s=k}(p)$  и  $M_{s=k+1}(p)$  как интегралы в форме Лебега [8, 9].



**Рисунок 1.** Внешний вид функций  $M_s(p)$ : график 1 –  $M_{s=1}(p)$ , график 2 –  $M_{s=2}(p)$ , график 3 –  $M_{s=3}(p)$ , график 4 –  $M_{s=4}(p)$ , график 5 –  $M_{s=5}(p)$ .

$$\forall p \ M_{s=k}(p) > M_{s=k+1}(p) \Rightarrow \sum_{i=p_{min}}^{p_{max}} M_{s=k}(p) > \sum_{i=p_{min}}^{p_{max}} M_{s=k+1}(p) \Rightarrow \int_0^1 M_{s=k}(p) dp > \int_0^1 M_{s=k+1}(p) dp$$

$p_{min} = 0, p_{max} = 1$  (8)

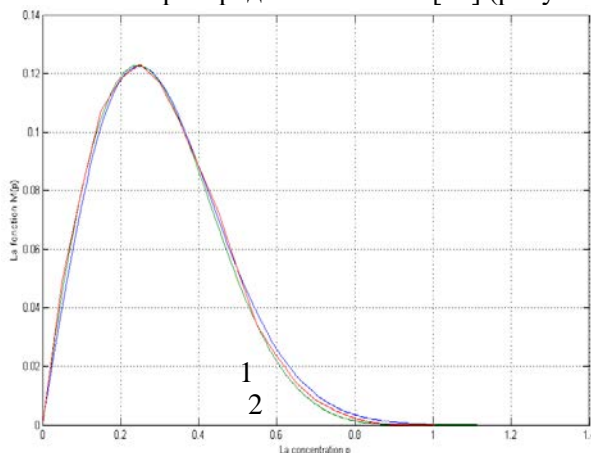
Посчитав первые шесть таких интегралов, заметим, что при  $s = 6 \int_0^1 M_{s=6}(p) dp = o(p)$ , т.е. является малой величиной и не вносит существенного вклада в  $M(p)$ .

Тогда:

$$M(p) \approx \sum_{s=1}^5 \sum_{t=t_{min_s}}^{t_{max_s}} g_{stN} p^s (1-p)^t$$

(9)

Подобное выражение хорошо аппроксимируется модифицированной функцией, совпадающей с функцией плотности распределения Рэля [10] (рисунок 2).



**Рисунок 2.** Аппроксимация функции  $M(p)$  модифицированной функцией плотности распределения Рэля. График 1 – модифицированная функция плотности распределения Рэля, график 2 – функция  $M(p)$ , график 3 – функция  $M(p)$ , полученная в ходе математического эксперимента.

Анализируя графики на рисунке 2, заметим, что точки максимума на графиках совпадают, а максимумы находятся как раз на концентрации 0.26.

График 1 на данном рисунке – модифицированная путем введения параметра  $C$  функция плотности распределения Рэля, выраженная следующим образом:

$$f(p, C, \sigma) = C \frac{p}{\sigma^2} e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

где  $\sigma$  – параметр функции Релея  $p$  – концентрация объектов – вероятность наличия в ячейке объекта,  $C$  – коэффициент нормировки, модифицирующий функцию Релея и численно равный определенному интегралу от  $M(p)$ :

$$C \approx \int_0^1 M(p) dp \tag{11}$$

где  $p$  – концентрация,  $M(p) = \sum_{s=1}^{S=N} \sum_{t=t_{min_s}}^{t_{max_s}} g_{stN} p^s (1-p)^t$ .

Исследование функций  $f(p, C, \sigma)$  и  $M(p)$  показало, что точки их максимумов совпадают и равны  $p_{max} = 0.26$ . Т.е. при этой концентрации наблюдается максимальное количество кластеров на перколяционной матрице, что означает, что количество локальных задач, решаемых роём размера  $S = Np_{max}$ , а следовательно, и кластеров роботов также будет максимальным.

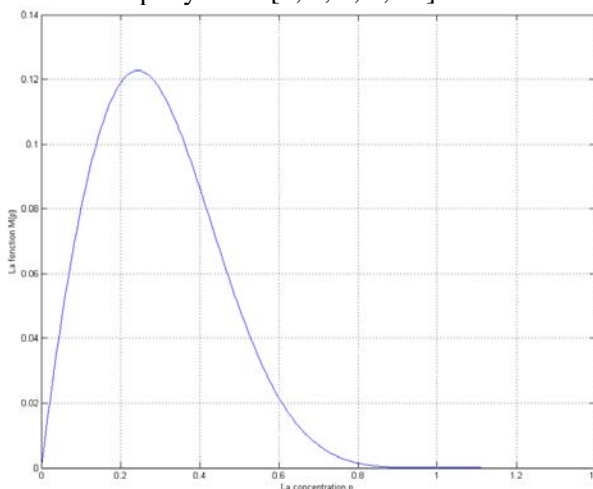
#### 4. Статистическое моделирование образования кластеров из объектов роя

Был проведен обширный математический эксперимент по исследованию образования кластеров из объектов роя при их равномерном распределении («засеве») вдоль матрицы. Данный эксперимент проводился следующим образом: на множестве перколяционных матриц проводился засев объектов с различными концентрациями (рисунок 3).



**Рисунок 3.** Пример засеянных перколяционных матриц разной концентрации (0.25; 0.4; 0.6).

Далее алгоритмом Хошена-Копельмана [15, 19] выделялись кластеры, количество которых считалось и нормировалось в зависимости от размера матрицы (эксперимент проводился для матриц размером  $50 \times 50$ ,  $100 \times 100$  и  $200 \times 200$ ). Полученный нормированный по размеру матрицы результат представлен на рисунке 4 [2, 3, 4, 5, 24]:



**Рисунок 4.** Результат статистического исследования.

Полученный результат был аппроксимирован с помощью метода наименьших квадратов по 200-м точкам модифицированной функции Рэлея  $f(p, C, \sigma)$  (рисунок 2) по параметрам  $C$  и  $\sigma$ . Нормальные уравнения для метода наименьших квадратов следующие:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = - \frac{\sum_{i=1}^{200} y_i p_i^3 e^{-\frac{p_i^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{i=1}^{200} \frac{p_i^4}{\sigma^2} e^{-\frac{p_i^2}{\sigma^2}}} \\ \sum_{i=1}^{200} y_i p_i e^{-\frac{p_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{200} y_i p_i^3 e^{-\frac{p_i^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{i=1}^{200} \frac{p_i^4}{\sigma^2} e^{-\frac{p_i^2}{\sigma^2}}} \sum_{i=1}^{200} p_i^2 e^{-\frac{p_i^2}{\sigma^2}} \end{array} \right. \quad (12)$$

где  $y_i$  – данные, полученные в ходе математического эксперимента,  $p_i$  – концентрация,  $C$  – коэффициент нормировки,  $\sigma$  – параметр закона Рэлея.

Значения параметров  $C$  и  $\sigma$ , полученных в результате аппроксимации функции  $M(p)$  нормированной функцией Рэлея  $f(p, C, \sigma)$ , равны соответственно 0.0496 и 0.26, что совпадает со значением определенного интеграла функции  $M(p)$  для первых пяти слагаемых и значением числа степеней свободы для функции  $f(p, C, \sigma)$ .

Т.е. результаты статистического моделирования, математического аналитического моделирования и аппроксимации их модифицированной функцией распределения Рэлея совпали с удовлетворительной точностью.

## 5. Выводы

В результате проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Максимальное количество кластеров в рою объектов позволяет их легко коммутировать и объединять для совместного решения задач в нужном месте зоны обслуживания. Это место может назначаться оперативно [2, 3, 4, 5, 24]. Концентрация объектов роя на поверхности зоны обслуживания, при которой количество кластеров роботов максимально (функция  $M(p) = \sum_{s=1}^{S=N} \sum_{t=t_{mins}}^{t_{maxs}} g_{st} N p^s (1-p)^t$ ), равна  $p_{max} = 0.26$ .

2. Значение концентрации, полученное аналитическим моделированием подтверждается статистическим математическим моделированием. Размер роя выражается как  $S = N p_{max}$ , где  $N$  – это число ячеек в перколяционной матрицы ( $N = l_1 l_2$ ),  $S$  – размер роя,  $p_{max}$  – концентрация.

3. Полученный вид кривой хорошо аппроксимируется модифицированной функцией Рэлея  $f(p, C, \sigma) = C \frac{p}{\sigma^2} e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}}$ .

## 6. Литература

- [1] Москалев, П.В. Математическое моделирование пористых структур / П.В. Москалев, В.В. Шитов. – Москва: Физматлит, 2007. – 120 с.
- [2] Мостовой, Я.А. Статистические феномены больших распределенных кластеров наноспутников / Я.А. Мостовой // Вестник Самарского Государственного Университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). – 2011. – Т.26, № 2. – С. 80-89.
- [3] Мостовой, Я.А. Двухфазные операции в больших сетях наноспутников / Я.А. Мостовой // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 1. – С. 120-130.
- [4] Мостовой, Я.А. Управляемая перколяция и оптимальные двухфазовые операции в больших сетях наноспутников / Я.А. Мостовой // Инфокоммуникационные технологии. – 2013. – Т. 11, №1. – С. 53-62.
- [5] Мостовой, Я.А. Моделирование оптимальных двухфазных операций в случайных операционных средах / Я.А. Мостовой // Автометрия. – 2015. – Т. 51, №3. – С. 35-41.
- [6] Тарасевич, Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю.Ю. Тарасевич. – Москва: УРСС, 2002. – 109 с.

- [7] Шень, А. Математическая индукция / А. Шень. – МЦНМО, 2004. – 36 с.
- [8] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа – изд. четвертое, переработанное / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
- [9] Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
- [10] Перов, А.И. Статистическая теория радиотехнических систем / А.И. Перов. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.
- [11] Каляев, И.А. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян. – М.: Физматлит, 2009.
- [12] Каляев, И.А. Стайные принципы управления в группе объектов / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – № 12. – С. 27-38.
- [13] Alexandrowicz, Z. Critically branched chains and percolation clusters / Z. Alexandrowicz // Physics Letters A. – 1980. – Vol. 80(4). – P. 284-286.
- [14] Abraham, A. Swarm Intelligence in Data Mining. Studies in Computational Intelligence / A. Abraham, C. Grosan, V. Ramos // Springer Verlag, Germany, 2006.
- [15] Babalievski, F. Cluster counting: the Hoshen-Kopelman algorithm vs. Spanning tree approach / F. Babalievski // International Journal of Modern Physics C. – 1998. – Vol. 9(1). – P. 43-61.
- [16] Beni, G. From Swarm Intelligence to Swarm Robotics / G. Beni // Swarm Robotics SAB 2004 International Workshop, Santa Monica, CA, USA, July 17, 2004, Revised Selected Papers. Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3342. – P. 1-10.
- [17] Bonabeau, E. Swarm Intelligence: A Whole New Way to Think About Business / E. Bonabeau, Ch. Meyer // Harvard Business Review. – 2001. – Vol. 79(5). – P. 106-114.
- [18] Galam, S. Universal formulas for percolation thresholds / S. Galam, A. Mauger // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53(3). – P. 2177-2181.
- [19] Hoshen, J. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm / J. Hoshen, R. Kopelman // Phys. Rev. B. – 1976. – Vol. 14. – P. 3438-3445.
- [20] Sahin, E. Swarm robotics: From sources of inspiration to domains of application / E. Sahin // Swarm Robotics. Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3342/2005. – P. 10-20.
- [21] Sarshar, N. Scalable Percolation Search in Power Law Networks / N. Sarshar, P.O. Boykin, V.P. Roychowdhury // Proceedings of the Fourth International Conference on Peer-to-Peer Computing. – Zurich, Швейцария, 2004.
- [22] Stauffer, D. Scaling theory of percolation clusters / D. Stauffer // Physics Reports. – 1979. – Vol. 54. – P. 1-74.
- [23] Stauffer, D. Introduction to Percolation Theory / D. Stauffer, A. Aharony. – London: Taylor & Francis, 1992.
- [24] Mostovoy, Y.A. Large scale networks security strategy / Y.A. Mostovoy, V.A. Berdnikov // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 1901. – P. 187-193.

### 7. Приложение А

Для определения слагаемых, которые вносят наибольший вклад в функцию  $M(p)$  при зафиксированном  $p$  от 0 до 1, например  $p = p^*$ , воспользуемся методом математической индукции [7]:

$$s = 1 \Rightarrow t = 4; g_{stN} = 1; M_{s=1} = p^*(1 - p^*)^4 \tag{A1}$$

$$s = 2 \Rightarrow t = 6; g_{stN} = 2; M_{s=2} = 2p^{*2}(1 - p^*)^6 \tag{A2}$$

$$M_{s=1} > M_{s=2} \tag{A3}$$

Пусть подобное неравенство справедливо для первых  $k$  элементов:

$$M_{s=k-1}(p) > M_{s=k}(p) \tag{A4}$$

$$M_{s=k}(p) = p^{*k} \sum_{i=\min_{s=k}}^{\max_{s=k}} g_{st_iN} (1 - p^*)^{t_i} \tag{A5}$$

$$M_{S=k+1}(p) = p^{*k+1} \sum_{i=\min_{S=k+1}}^{\max_{S=k+1}} g_{st_iN}(1-p^*)^{t_i} \quad (A6)$$

если:

$$\left. \begin{aligned} t_{\min_{S=k}} = t_{\min_{S=k+1}} \\ 0 < 1 - p^* < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1-p^*)^{t_{\min_{S=k}}} = (1-p^*)^{t_{\min_{S=k+1}}} \Rightarrow (1-p^*)^{t_{\min_{S=k}}} > p^*(1-p^*)^{t_{\min_{S=k+1}}} \quad (A7)$$

если:

$$\left. \begin{aligned} t_{\min_{S=k}} < t_{\min_{S=k+1}} \\ 0 < 1 - p^* < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1-p^*)^{t_{\min_{S=k}}} > (1-p^*)^{t_{\min_{S=k+1}}} \quad (A8)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{\max_{S=k}} < t_{\max_{S=k+1}} \\ 0 < 1 - p^* < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1-p^*)^{t_{\max_{S=k}}} > (1-p^*)^{t_{\max_{S=k+1}}} \quad (A9)$$

если  $t_i = t_j$ , то  $g_{kt_iN}$  обычно больше чем  $p^*g_{(k+1)t_jN}$ , т.к.  $g_{kt_iN}$  и  $g_{(k+1)t_jN}$  обычно являются числами одного порядка. Т.е. отдельный элемент суммы может быть как больше, так и меньше аналогичного элемента, но таких  $t_i$  и  $t_j$  в суммах  $M_{S=k}(p)$  и  $M_{S=k+1}(p)$  мало, и они не сильно влияют на итоговый результат.

Т.к. в суммах  $M_{S=k}(p)$  и  $M_{S=k+1}(p)$  разное количество слагаемых, то разобьем эти суммы следующим образом:

$$M_{S=k}(p) = \left( \sum_{i=t_{\min_{S=k}}}^{t_{\max_{S=k}}-1} g_{kt_iN}(1-p^*)^{t_i} + g_{kt_{\max_{S=k}}N}(1-p^*)^{t_{\max_{S=k}}} \right) p^{*k} \quad (A10)$$

$$M_{S=k+1}(p) = \left( \sum_{i=t_{\min_{S=k+1}}}^{t'} g_{(k+1)t_iN}(1-p^*)^{t_i} + \sum_{j=t'+1}^{t_{\max_{S=k+1}}} g_{(k+1)t_jN}(1-p^*)^{t_j} \right) p^{*k+1} \quad (A11)$$

Особенность такого разбиения в том, что количество внутренних слагаемых в слагаемом, содержащем знак суммы, в  $M_{S=k}(p)$  равно количеству слагаемых в первой сумме в  $M_{S=k+1}(p)$ .

Если  $\left. \begin{aligned} t_{\min_{S=k}} = t_{\min_{S=k+1}} \\ t \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\}$ , то попадаем в случай, когда  $t_i = t_j$ , т.е.  $\forall i \Rightarrow g_{kt_iN}(1-p^*)^{t_i} >_p p^*g_{(k+1)t_iN}(1-p^*)^{t_i}$ . Здесь  $>_p$  означает «вероятно больше».

Если:

$$\left. \begin{aligned} t_{\min_{S=k}} < t_{\min_{S=k+1}} \\ t \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t_{\max_{S=k}} - 1 < t' \\ 0 < 1 - p^* < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \forall i g_{kt_iN}(1-p^*)^{t_i} > p^*g_{(k+1)t_iN}(1-p^*)^{t_i} \quad (A12)$$

Т.е.:

$$\sum_{i=t_{\min_{S=k}}}^{t_{\max_{S=k}}-1} g_{kt_iN}(1-p^*)^{t_i} > \left( \sum_{i=t_{\min_{S=k+1}}}^{t'} g_{(k+1)t_iN}(1-p^*)^{t_i} \right) p^* \quad (A13)$$

Сравним теперь  $g_{kt_{\max_{S=k}}N}(1-p^*)^{t_{\max_{S=k}}}$  и  $p^* \left( \sum_{j=t'+1}^{t_{\max_{S=k+1}}} g_{(k+1)t_jN}(1-p^*)^{t_j} \right)$ . Для этого разобьем  $g_{kt_{\max_{S=k}}N}$  на столько слагаемых, сколько во второй сумме в  $M_{S=k+1}(p)$ . Тогда получим суммы с одинаковым количеством элементов внутри.

$$\left. \begin{aligned} t_{\max_{S=k}} = t' + 1 \text{ совпадает со случаем } t_i = t_j, \text{ т.е.:} \\ \frac{g_{kt_{\max_{S=k}}N}}{U} (1-p^*)^{t_{\max_{S=k}}} >_p p^*g_{(k+1)t'N}(1-p^*)^{t'} \end{aligned} \right\} \quad (A14)$$

где  $U$  – количество слагаемых во второй сумме в  $M_{S=k+1}(p)$ .

Для остальных  $t_j$  будет справедливо:

$$t_j > t' + 1: \left. \begin{aligned} t_{\max_{S=k}} < t_j \\ 0 < 1 - p^* < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{g_{kt_{\max_{S=k}}N}}{U} (1-p^*)^{t_{\max_{S=k}}} > p^*g_{(k+1)t_jN}(1-p^*)^{t_j} \quad (A15)$$

Т.е.:



$$g_{kt_{\max_{s=k}}N}(1-p^*)^{t_{\max_k}} > \left( \sum_{j=t'+1}^{t_{\max_{s=k+1}}} g_{(k+1)t_jN}(1-p^*)^{t_j} \right) p^* \quad (\text{A16})$$

Следовательно,  $M_{s=k}(p) > M_{s=k+1}(p)$  и в  $M(p)$  вносят основной вклад лишь несколько первых слагаемых.

## Analytical and numerical modeling of clusters of objects in a random environment

Y.A. Mostovoi<sup>1</sup>, V.A. Berdnikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** The solution of the problem of sensing a certain zone of sensing by a swarm of randomly distributed objects is considered. This requires the study of the statistical characteristics of the formation of clusters from uniformly distributed swarm objects in order to search for such a concentration of objects in the zone of sensing at which the number of random clusters will be maximized. The problems of finding the optimal size of a swarm to a given zone of sensing and the size of the zone of sensing for a given swarm are considered.

**Keywords:** mathematical modeling, probability theory, mathematical statistics, swarm of objects, percolation.