Алгоритмы проектирования сетей связи с применением жадных эвристик разных типов

А.Г. Булынин[1], Б.Ф. Мельников[2], В.Ю. Мещанин[1], Ю.Ю. Терентьева[1]

[1]Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти, Пресненский Вал, 19, стр. 1, Москва, Россия, 123557
[2]Российский государственный социальный университет, Вильгельма Пика 4, стр.1, Москва, Россия, 129226

Аннотация. Рассмотрены две часто возникающие задачи при моделировании сети связи, связанные с построением графа сети связи, удовлетворяющего определенным условиям. Предложен алгоритм, к которому может быть сведено решение обеих задач, относящийся к классу жадных алгоритмов. Исследован вопрос о единственности решения поставленных задач. Получен положительный результат решения вопроса и выявлены достаточные условия единственности. Проведенные исследования и разработка соответствующего программного обеспечения имеют практическую значимость при проектировании реальных сетей связи.

1. Введение

Рассмотрим задачу построения сети связи на основе имеющихся разрозненных фрагментов сети связи. Такая задача часто возникает при проведении модернизации сети и сопровождается комплексом аналитических исследований для выявления и достижения сетью связи требуемых технических характеристик. В данном случае будем рассматривать построение связного графа сети связи на основе имеющихся несвязных подграфов сети с выполнением требования минимизации затрат на строительство, что соответствует минимальному значению суммы длин ребер моделируемого графа.

Фактически рассматриваемая ситуация - это задача построения остовного дерева минимального веса [1]. Решать эту задачу будем с использованием эвристического жадного алгоритма. Будут рассмотрены две разновидности этой задачи (далее будем называть их задача 1 и задача 2), имеющей достаточно высокую практическую значимость в области теории сетей связи [2]. При построении математической модели сети связи в части решения задач 1,2 предлагается использовать один общий алгоритмический модуль, основанный на жадном алгоритме. Кроме того, в следующих публикациях будет приведено строгое доказательство единственности решения при определенных условиях (см. далее по тексту о достаточных условиях единственности). Отметим, что в общем случае согласно теореме Кирхгофа [1,стр.57] может существовать более одного остовного дерева в связном графе. Для нахождения остова минимального веса могут быть использованы алгоритмы Краскала, Прима [1,стр.60]. В нашем случае имеющийся граф сети связи нужно достроить до такого графа, для которого все вновь достраиваемые ребра были бы элементами остовного дерева, который для построенного графа определяется с использованием вышеупомянутых алгоритмов. Приведенные далее алгоритмы могут быть рассмотрены как адаптации алгоритма Краскала к задаче построения оптимальной сети связи с привнесением новизны условий единственности оптимального решения. Адаптация производится при условии применения алгоритма Краскала к некоторому полному графу, построенному на базе имеющегося графа сети связи.

2. Задача 1. Построение сети связи на основании заданной исходной сети связи, удовлетворяющей условию связности и минимальной суммарной длины достраиваемых линий связи

Постановка задачи выглядит следующим образом. Пусть $G = <V, E>$ исходный граф сети связи. Имеем задачу оптимизации следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{N_{G'}} \rho(r_i) \to \min \qquad (1)$$

$$\forall d_i \in \hat{D} \; f(d_i) > 0, \; i \in \left[1, N^{\hat{D}}\right] \qquad (2)$$

Здесь r_i- достраиваемая линия связи, $\rho(r_i)$- протяженность линии связи r_i, ($\rho(r_i) \in R$) представляет собой функцию географического расстояния между точками с заданными географическими координатами, определяемыми инцидентными вершинами линии связи r_i, $\hat{D} = \{d_i\}_{i=1}^{N_{\hat{D}}}$ - множество всех возможных информационных направлений связи [3], $N_{\widehat{D}} \in N$- количество всех возможных направлений связи ($N_{\hat{D}} = C_{N_{I_Z}}^2$, $N_{\hat{D}} = \dfrac{(N_{I_Z})!}{2!(N_{I_Z} - 2)!}$), $d_i = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)})$ - информационное направление связи, где $v_1^{(i)} \in V$ (идентификатор) и $v_2^{(i)} \in V$ (идентификатор) образуют корреспондирующую пару, $f(d_i)$-надежность информационного направления связи d_i [3-5], $d_i \in \widehat{D}$, $f(d_i) \in [0,1]$, $f(d_i) \in R$. Другими словами, необходимо построить связный граф для заданного исходного графа с минимальной суммарной длиной достраиваемых ребер.

Оптимальное решение задачи находится с помощью жадного алгоритма. А именно, среди пар вершин (v_1, v_2), где $v_1 \in V$ и $v_2 \notin V$, ещё не включённых в множество достраиваемых ребер (рассматриваемое как множество пар вершин), выбирается такая, что, во-первых, вершины v_1 и v_2 *в уже построенном графе* принадлежат разным компонентам связности (то есть $f(d) = 0$, где $d \in \hat{D}$, $d = (v_1, v_2)$), и, во-вторых, среди всех таких пар выбирается та, у которой значение $\rho(v_1, v_2)$ минимально.

Алгоритм решения задачи 1

1. Для всех ребер исходного графа положить весовой коэффициент равным нулю.
2. Полагаем множество достраиваемых ребер $M := \otimes$
3. Полагаем вспомогательное множество вершин $V' = \{v_1\}$, $v_1 \in V$.
4. Полагаем $V := V - V'$, то есть исключить из множества вершин V вершину $v_1 \in V$.
5. Если $V = \otimes$, то останов. Иначе шаг 6.
6. Выбор пары (v_1, v_2), такой что:
   1) $v_1 \in V'$ и $v_2 \in V$
   2) $(v_1, v_2) \in E$
   3) $v_1 \neq v_2$
   4) $(v_1, v_2) \notin M$

Если такая пара существует, то полагаем

$$V := V - \{v_2\},$$

$$V' := V' \cup \{v_2\},$$

$M := M \cup \{(v_1, v_2)\}$
$E := E - \{(v_1, v_2)\}$

7. Выбор пары (v_1, v_2), такой что:
 1) $v_1 \in V'$ и $v_2 \in V$
 2) $v_1 \neq v_2$
 3) $(v_1, v_2) \notin M$
 4) $\rho(v_1, v_2)$ минимально среди всех $\rho(v_1, v_2)$ таких, что $(v_1, v_2) \in E$

Если такая пара существует, то полагаем

$$M := M \cup \{(v_1, v_2)\},\ E := E - \{(v_1, v_2)\},\ V := V - \{v_2\},\ V' := V' \cup \{v_2\}.$$

8. Если $V = \otimes$, то останов, M - искомое множество ребер графа, которое обеспечивает связность и минимальную суммарную длину. Иначе переход на шаг 6.

Утверждение 1. Алгоритмическая сложность алгоритма решения задачи 1 составляет $O(|V|^3 \times |E|)$.

Доказательство. Для присоединения очередной вершины необходимо просмотреть список всех имеющихся ребер исходного графа, следовательно, сложность будет пропорциональна $|E|$ (на самом деле можно оптимизировать перебор ребер, просматривая лишь те, которые еще не соединяют вершины в уже построенном графе). Рассмотрим процедуру перебора вершин графа для присоединения очередной вершины. Пусть n – количество вершин в графе и i - количество уже присоединенных вершин. Для присоединения очередной $(i+1)$-й вершины производится анализ попарный вершин из множеств мощностью i и $n-i$. Отсюда количество проанализированных пар составит $\sum_{i=1}^{n}[i(n-i)]$. Преобразуем данное выражение. Получим $n\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$. Следовательно, имеем кубическую сложность от мощности множества вершин. Учитывая пропорциональность алгоритмической сложности мощности множества ребер графа $|E|$, получим асимптотику $O(|V|^3 \times |E|)$.

Доказано следующее утверждение, дающее достаточность единственности оптимального решения задачи 1.

Утверждение 2. Если расстояния между неинцидентными вершинами графа различны, то данный алгоритм приводит к единственному оптимальному решению задачи 1.

Отметим, что различие в попарных расстояниях между вершинами графа несложно достигается за счет высокого разрешения действительного числа (например, для формата числа с плавающей запятой в стандарте IEEE 754 возможный диапазон чисел составляет от $4{,}94 \cdot 10^{-324}$ до $1{,}79 \cdot 10^{308}$), которое представляет расстояние между вершинами и имеет место быть на сетях связи реальных масштабов.

Рассмотрим еще одну задачу, которая часто возникает при проектировании/моделировании сети связи. А именно, это задача оптимальной привязки узлов-потребителей к узлам-провайдерам связи. Оптимальность здесь также будет рассматриваться относительно минимальной суммарной длины достраиваемых ребер. Таким образом, должен получиться граф, состоящий из множества подграфов (не обязательно связанных между собой), такой, что в каждом подграфе должен содержаться ровно один элемент множества $I_M = \{s_i^M\}_{i=1}^{N_{I_M}}$, и при этом суммарная длина ребер должна быть минимальна.

3. Задача 2. Построение привязок узлов-потребителей сети связи к узлам-провайдерам, удовлетворяющее условию минимальной суммарной длины достраиваемых линий связи

Постановка задачи выглядит следующим образом. Пусть $G = \langle V, E \rangle$ исходный граф сети связи, причем $V = I_M \cup I_Z$, где $I_M = \{s_i^M\}_{i=1}^{N_{I_M}}$ - множество узлов-провайдеров связи, $N_{I_M} \in N$;

s_i^M - узел-провайдер связи; $I_Z = \{s_i^Z\}_{i=1}^{N_{I_Z}}$ - множество узлов-потребителей связи, $N_{I_Z} \in N$, s_i^Z - множество узлов-потребителей связи, $N_{I_Z} \in N$. Оптимизационная задача:

$$\sum_{i=1}^{N_{G'}} \rho(r_i) \to \min$$

(3)

$$G' = \bigcup_{i=1}^{N_{I_M}} < V'(i), E'(i) > \quad \text{, где} \qquad (4)$$

$V'(i)$ содержит ровно один элемент из множества $I_M = \{s_i^M\}_{i=1}^{N_{I_M}}$, и никакой элемент $s_i^M \in I_M$ не может входить в разные множества $V'(i)$ и $V'(j)$ ($i \neq j$). То есть имеет место биективное соответствие элементов множеств $I_M = \{s_i^M\}_{i=1}^{N_{I_M}}$ и $\{V'(i)\}_{i=1}^{N_{I_M}}$.

При этом $E'(i)$ содержит хотя бы одно ребро, инцидентное

$$s_i^M \in I_M \quad (i = 1..N_{I_M}). \qquad (5)$$

Данная задача может быть успешно решена также с использованием жадного алгоритма. Для этого необходимо провести алгоритмическую адаптацию решения задачи 2 к решению задачи 1. В результате алгоритм будет нижеследующим.

Алгоритм решения задачи 2

1. Для всех ребер графа положить весовой коэффициент $\rho(v', v'')$ равным нулю.
2. Полагаем множество достраиваемых ребер $M := \otimes$
3. Полагаем вспомогательное множество вершин $V' = I_M$, то есть множество вершин, соответствующих узлам-провайдерам.
4. Полагаем $V = I_Z$, то есть множество вершин, соответствующих узлам-потребителям.
5. Далее используем алгоритм решения задачи 1, начиная с шага 5.

Реализация данного алгоритма обеспечит выполнение требований (3-5). Алгоритмическая сложность также составит $O(|V|^3 \times |E|)$ (см. утверждение 1).

Относительно задачи 2 также может быть доказано, что приведенный жадный алгоритм даст единственное оптимальное решение в случае, если все попарные расстояния между вершинами различны.

4. Заключение

Таким образом, на основании двух фактов – невысокая алгоритмическая сложность, приемлемая для современных вычислительных ресурсов, а также доказанного свойства предоставлять единственное оптимальное решение в указанном случае, вероятность которого может быть сведена к единице, жадные алгоритмы являются эффективным инструментом для построения и/или модернизации сетей связи. Предложенные алгоритмы были реализованы при построении реальных крупномасштабных сетей связи, и могут быть соответственно использованы при решении задач как построения цельной сети связи с условием минимизации достраиваемых линий связи, так и при решении задач оптимальной привязки узлов-потребителей сети связи к узлам-провайдерам.

5. Литература

[1] Емеличев, В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с.
[2] Сети электросвязи / Г.Б. Давыдов, В.Н. Рогинский, А.Я. Толчан – М.: Связь, 1977. – 360 с.
[3] Дудник, Б.Я. Надежность и живучесть систем связи / Б.Я. Дудник, В.Ф. Овчаренко, В.К. Орлов – М.: Радио и связь, 1984. – 216 с.

[4] Филин, Б.П. Методы оценки структурной надежности сетей связи – М.: Радио и связь, 1988. – 220 с.
[5] ГОСТ Р 53111-2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки.

Algorithms for designing communication networks using greedy heuristics of various types

A.G. Bulynin[1], B.F. Melnikov[2], V.Y. Meschanin[1], Y.Y. Terentyeva[1]

[1]Center of Information Technologies and Systems for Executive Power Authorities, Presnensky Val, 19/1, Moscow, Russia, 123557
[2]Russian State Social University, Wilhelma Pica 4, p. 1, Moscow, Russia, 129226

Abstract. We consider two frequently occurring problems in the modeling of the communication network associated with the construction of a graph of the communication network that satisfies certain conditions. We propose an algorithm to which the solution of both problems can be reduced, which belongs to the class of greedy algorithms. The question of the uniqueness of the solution of the tasks is investigated. A positive result of the solution of the problem is obtained and sufficient conditions of uniqueness are revealed. The conducted researches and development of the corresponding software have practical significance at design of real communication networks.