АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСФЕРАБЕЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ПРИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ В СИЛЬНОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ПРИОРИТЕТАМИ

М.И. Гераськин

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Рассматривается задача многокритериального управления на основе максимизации агрегированной полезности. Для сильносвязанных технических и организационных систем при трансферабельной полезности разработан алгоритм распределения полезности системы при неравнозначных критериях, заданных вектором приоритетов. Для распределения, формируемого на основе алгоритма, доказана эффективность по Парето.

Ключевые слова: многокритериальное управление, агрегированная полезность, сильносвязанная система, трансферабельная полезность, алгоритм распределения, приоритеты критериев

Введение

В технических и организационных системах, эффективность которых оценивается несколькими критериями, задача многокритериального оптимального управления решается, во-первых, на основе критерия эффективности Парето [1] с формированием соответствующего множества; во-вторых, путем максимизации ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна [2] в той или иной форме [3-6]. Второй подход обеспечивает единственность решения задачи, но его применение обосновано в случае адекватности модели сильносвязанной системы [7] применительно к конкретной совокупности критериев. Система является сильносвязанной, если критерии ее элементов отвечают аксиомам [8] предпочтения (рефлексивности, связности, транзитивности и др.), вследствие чего допустима редукция вектора критериев к скалярной задаче оптимизации агрегированной полезности, решение которой при условии соответствия критерию минимакса [9] является эффективным по Парето [10]. Агрегирование полезности может быть обосновано физико-техническими свойствами систем, в частности, в задачах терминального управления [11] отклонения от целевых значений фазовых координат агрегированно представимы в форме метрики (расстояния) в гиперпространстве критериев; в задачах многокритериального статистического оценивания [12] моменты случайных величин представимы в виде коэффициента вариации. В общем случае агрегирование критериев базируется на свойствах целостности и иерархичности систем [13], например, систем, реализующих взаимосвязанные технологии, в которых в силу единства производственного процесса критерии элементов сводятся к агрегированному критерию системы.

Частным случаем сильносвязанной системы является система с трансферабельной полезностью, критерии которой выражены в одном измерителе, например, при оптимизации производительности однородных технологий [14]. В общем случае любая система критериев может быть формально сведена к трансферабельной представлением [9] критериев в безразмерной форме путем соответствующей нормализации. При трансферабельной полезности допустимо перераспределение (трансфер) значений вектора критериев элементов системы, соответствующего некоторому Парето эффективному управлению. В результате задача многокритериального управления сводится к задаче оптимального распределения полезности между элементами системы по агрегированному критерию, решение которой также будет эффективно по Парето.

Алгоритмы распределения трансферабельной полезности разработаны для систем, в которых элементы имеют равнозначные критерии (анонимных элементов), в этом случае при агрегировании не учитываются приоритеты критериев. В частности, эффективность по Парето обоснована [15] для алгоритма, в котором определяется минимум между оптимумом элемента и средней нераспределенной полезностью системы. Если критерии элементов системы имеют различные приоритеты, то алгоритмы распределения сводятся к медианному многокритериальному выбору [16], в общем случае не эффективному по Парето, однако разработаны механизмы анонимных симметричных коалиций [17], в частных случаях эффективные по Парето. В дальнейшем рассмотрим проблему разработки Парето эффективного алгоритма распределения трансферабельной полезности между элементами с приоритетами на базе результатов [14], полученных для анонимных элементов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, эффективность элементов которой определяет вектор критериев $f=\{f_k(u), k\in K\}$. Пусть скалярный оптимум u_k^0 по критерию k-го элемента определяется из условия

$$u_k^0 = Arg\max_{u_k\in U_k} f_k(u), \quad f_k^0 = f_k(u_k^0), k\in K, \qquad (1)$$

где и – управление, U – область допустимых управлений, $f_k(u), k\in K$ – критерий эффективности k-го элемента.

Необходимый для последующей нормализации вектор минимумов критериев сформируем из значений, достигаемых при скалярных оптимумах других элементов:

$$f_k^{\min} = \min_{j\in K\setminus k} f_k(u_j^*), k\in K. \qquad (2)$$

При выполнении (1), (2) диапазон изменения значений критериев равен $f_k(u_k)\in[f_k^0, f_k^{\min}]$.

Введем гипотезу благожелательности [7], согласно которой в сильносвязанной системе элементы максимизируют полезность системы в целом, то есть управление определяется исходя из максимального значения суммы критериев при оптимумах элементов. При этом формируется единственное решение многокритериальной задачи, являющееся согласно теореме Гермейера [1,9] эффективным по Парето, которое обозначим u^* и определим в виде:

$$u^* = Arg\max_{k\in K}\sum_{j\in K}\left[\max_{u_k\in U_k} f_j(u_k)\right],$$
$$f_k^* = f_k(u^*), k\in K, \qquad (3)$$

где f_k^* – значение k-го критерия при оптимуме сильносвязанной системы.

Максимальную суммарную полезность $F(u^*)$ сильносвязанной системы при управлении (3) определим как превышение оптимумов критериев над их минимальными значениями:

$$F(u^*) = \sum_{k\in K}\left(f_k^* - f_k^{\min}\right). \tag{4}$$

Введем вектор распределения полезности системы $X = \{x_k, k \in K\}$, принадлежащий допустимому множеству

$$F_X = \left\{X = \{x_k, k \in K\} : \sum_{k\in K} x_k \le F(u^*), X \in R_+^k\right\}.$$

Обозначим вектор критериев, формируемый в результате распределения суммарной полезности $f_k(x_k)$, и, с учетом (4), определим его выражением:

$$f_k(x_k) = f_k^{\min} + x_k, k \in K. \tag{5}$$

Функции критериев (5) представляют собой критерии эффективности распределения полезности между элементами при эффективном по Парето управлении (3). Сформулируем многокритериальную задачу оптимального распределения полезности в виде:

$$X^* = Arg\max_{X\in F_X}\{f_k(x_k), k \in K\}. \tag{6}$$

Введем вектор приоритетов критериев $\bar{\gamma}_k, k \in K$, компоненты которого задают их относительную значимость в агрегированной полезности системы. Поскольку в дальнейшем задача (6) формулируется как минимизация отклонений критериев от их скалярных максимумов, то целесообразно перейти к обратным приоритетам $\gamma_k = 1 - \bar{\gamma}_k, k \in K$, характеризующим относительную значимость других критериев по сравнению с данным. Вектор обратных приоритетов определим в виде

$$\Gamma = \{\gamma_k \in R_+, k \in K\}, \sum_{k\in K}\gamma_k = 1. \tag{7}$$

Поскольку из (1), (3) вытекает, что отклонения критериев (5) от скалярных максимумов (1) отрицательны, то определим нормализованные значения критериев $\tilde{f}_k(x_k, \gamma_k)$ как квадраты относительных отклонений критериев (5) и (1) с учетом обратных приоритетов:

$$\tilde{f}_k(x_k, \gamma_k) = \left(\frac{\gamma_k f_k(x_k) - f_k^0}{\gamma_k f_k^{\min} - f_k^0}\right)^2, k \in K. \tag{8}$$

Нормализация (8), во-первых, приводит критерии к диапазону $\tilde{f}_k(x_k, \gamma_k) \in [0,1]$, что позволяет оперировать с критериями (8) как с трансферабельными; во-вторых, задает транзитивность полезности $\tilde{f}(x_k, \gamma_k) \le \tilde{f}(x_i, \gamma_k) \forall \bar{\gamma}_k \ge \bar{\gamma}_i, k \in K \setminus i$, по которой более приоритетные критерии имеют меньшие потери полезности.

Для сильносвязанной системы, управление в которой определено по (3) и обеспечена трансферабельность полезности с помощью (8), допустима [7] редукция многокритериальной задачи (6) к скалярной оптимизационной задаче путем введения агрегированной функции полезности в виде произведения относительных отклонений (8):

$$X^* = Arg\min_{X\in F_X}\prod_{k\in K}\tilde{f}_k(x_k, \gamma_k). \tag{9}$$

Критерий в задаче (9) представляет собой агрегированную функцию полезности системы, причем, поскольку компоненты частных критериев входят в (9) в нормализованной форме (8), то удовлетворяющее (9) распределение эффекта обеспечивает [9] максимальную эффективность решения многокритериальной задачи (6) в смысле минимакса

$$\tilde{f}^*\left(X^*\right)=\min_{X\in F_X}\max_{k\in K}\tilde{f}_k\left(x_k,\gamma_k\right),$$

что соответствует, как показано в [10], эффективности по Парето.

2. Алгоритм распределения полезности

Оптимальное по критерию (9) распределение полезности системы (4) сформулируем в виде следующего утверждения: *распределение*

$$x_k^*=\frac{1}{1+\sum_{i\in K\setminus k}\frac{\gamma_k}{\gamma_i}}\left(F\left(u^*\right)+\sum_{i\in K\setminus k}f_i^{\min}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i\in K\setminus k}\frac{\gamma_k f_k^{\min}+f_{0i}-f_{0k}}{\gamma_i}f_i^{\min}\right),k\in K \tag{10}$$

является решением задачи (9).

Доказательство: дифференцируя функцию Лагранжа, записанную для задачи (9) с учетом (8)

$$L=\prod_{k\in K}\tilde{f}_k\left(x_k,\gamma_k\right)+\lambda\left(F-\sum_{k\in K}x_k\right)=$$
$$=\prod_{k\in K}\left(\frac{\gamma_k f_k\left(x_k\right)-f_k^0}{\gamma_k f_k^{\min}-f_k^0}\right)^2+\lambda\left(F-\sum_{k\in K}x_k\right),$$

получим систему необходимых условий оптимальности

$$L'_{x_k}=2\frac{\gamma_k f_k\left(x_k\right)-f_k^0}{\left(\gamma_k f_k^{\min}-f_k^0\right)^2}\times$$
$$\times\prod_{i\in K\setminus k}\frac{\left(\gamma_i f_i\left(x_i\right)-f_k^0\right)^2}{\left(\gamma_i f_i^{\min}-f_k^0\right)^2}-\lambda=0,k\in K \tag{11}$$

$$L'_{\lambda}=F-\sum_{k\in K}x_k=0\cdot \tag{12}$$

Исключая множитель Лагранжа из (11), имеем

$$\frac{\gamma_k f_k\left(x_k\right)-f_k^0}{\left(\gamma_k f_k^{\min}-f_k^0\right)^2}\prod_{i\in K\setminus k}\frac{\left(\gamma_i f_i\left(x_i\right)-f_i^0\right)^2}{\left(\gamma_i f_i^{\min}-f_i^0\right)^2}=$$
$$=\frac{\gamma_n f_n\left(x_n\right)-f_n^0}{\left(\gamma_i f_n^{\min}-f_n^0\right)^2}\prod_{i\in K\setminus n}\frac{\left(\gamma_i f_i\left(x_i\right)-f_i^0\right)^2}{\left(\gamma_i f_i^{\min}-f_i^0\right)^2},$$
$$k,n\in K,n\neq k,$$

откуда приходим к системе

$$\left(\gamma_k f_k(x_k) - f_k^0\right)\prod_{i\in K\setminus k}\left(\gamma_i f_i(x_i) - f_i^0\right)^2 =$$
$$= \left(\gamma_n f_n(x_n) - f_n^0\right)\prod_{i\in K\setminus n}\left(\gamma_i f_i(x_i) - f_i^0\right)^2,$$
$$k, n \in K, n \neq k,$$

или

$$\gamma_k f_k(x_k) - f_k^0 = \gamma_n f_n(x_n) - f_n^0, n \neq k \in K \qquad (13)$$

Подставив в (13) полезность системы (4) и полезности элементов (5) получим распределение (10). Дифференцируя (11), получим систему достаточных условий оптимальности

$$L''_{x_k} = \prod_{i\in K\setminus k}\frac{\left(\gamma_i f_i(x_i) - f_i^0\right)^2}{\left(\gamma_k f_i^{\min} - f_i^0\right)^2} > 0, k \in K,$$

которые выполняются при любых $f_i(x_i), f_i^0, f_i^{\min}$.

Поскольку распределение (10) максимизирует агрегированный критерий (9), то, согласно результатам [10], оно эффективно по Парето.

На основе решения (10) многокритериальной задачи (9) сформируем алгоритм распределения агрегированной полезности в виде последовательности следующих шагов.

1. Ввод исходных данных: функций критериев $f = \{f_k(u), k \in K\}$ и ограничений, задающих области допустимых управлений Uk.
2. Определение скалярных оптимумов критериев (1) и минимумов критериев (2).
3. Определение оптимумов критериев в системе (3) и полезности системы (4).
4. Задание вектора приоритетов (7).
5. Расчет распределения полезности (10) и вектора оптимальных критериев (5).

Для реализации алгоритма необходимо, чтобы множество допустимых управлений для всех критериев было не пусто $U_i \cap U_k \neq \varnothing, k \in K \setminus i$, а также чтобы функции $f = \{f_k(u), k \in K\}$ имели конечные максимумы в соответствующих допустимых областях U_k. Эти условия выполняются в реальных задачах, поскольку области U_k, как правило, компактны и для различных критериев одной системы обычно совпадают.

Заключение

Разработан алгоритм решения многокритериальных задач управления в сильносвязанных системах, позволяющий определить оптимальное исходя из минимума отклонений критериев от скалярных оптимумов распределение агрегированной полезности системы при неравнозначных критериях эффективности. Сфера применимости алгоритма охватывает технические и организационные системы, критерии эффективности которых количественно измеримы и определены их отношения предпочтения, в случае, если полезности элементов системы трасферабельны, что в общем случае обеспечивается нормализацией критериев. Алгоритм, основанный на агрегировании нормализованных критериев, при оптимизации функции полезности с учетом приоритетов приводит к распределению по принципу минимакса (гарантированного результата), следовательно, определяет эффективное по Парето решение многокритериальной задачи.

Применение алгоритма позволяет свести многокритериальную задачу оптимизации в пространстве управлений к совокупности скалярных задач оптимального управления и задаче многокритериального распределения в пространстве критериев. В результате определяется единственное решение, причем поиск решения многокритериальной задачи существенно упрощается.

Литература

1. Ногин, В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение/ Дж.Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970.
3. Саати, Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети/ Т. Л. Саати − М.: ЛКИ. 2008.
4. Фишхоф, В.Г. Субъективная ожидаемая полезность: модель принятия решений / В.Г. Фишхоф, Б.Г. Гольтейн, З.Р. Шапиро // Процедуры оценивания многокритериальных объектов. – М.: ВПИИСИ, 1984. Вып. 9. - С. 24-46.
5. Caverny, J.P. Contributions to decision research / J.P. Caverny, M. Bar-Hillel, F.N. Barron, H. Jungerman. – North-Holland. – 1993.
6. Smith, G.R. Logical decision: multy-measure decision analysis software / G.R. Smith, F. Speiser. – Golden. CO: PDQ Printing. 1991.
7. Novikov, D. Theory of Control in Organizations / D. Novikov – New York: Nova Science Publishers. 2013.
8. Roy, B. Multy criteria methodology for decision aiding / B. Roy – Dordrecht: Kluwer academic publisher. 1996.
9. Машунин, Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации / Ю.К. Машунин - М.: Наука. 1986.
10. Хоменюк, В.В. Элементы теории многоцелевой оптимизации / В.В. Хоменюк– М. Наука. 1983.
11. Гераськин, М.И. Терминальное управление спуском аэрокосмического аппарата в атмосфере при ограничениях на режимы движения / М.И. Гераськин, Ю.Н. Лазарев // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2001, №5, с. 168-174.
12. Балакин, В.Л. Исследование маневренных возможностей аэрокосмического аппарата при движении по суборбитальной траектории / В.Л. Балакин, М.И. Гераськин, Ю.Н. Лазарев // Авиакосмическая техника и технология, 1997, №2. – С. 46-48.
13. Гераськин, М.И. Модели оптимизации управления неиерархическими системами корпораций при межкорпоративных взаимодействиях / М.И. Гераськин // Проблемы управления. – 2010. –№5. – С.28-38.
14. Гераськин, М.И. Оптимизация взаимодействий в мультиагентной сильносвязанной системе «ритейлер-банк-страховщик» / М.И. Гераськин, В.В. Манахов // Проблемы управления. – 2015. –№4. – С.9-18.
15. Бурков, В.Н. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике / В.Н. Бурков, И.И. Горгидзе, Д.А. Новиков – М.: ИПУ РАН, 1997.
16. Бурков, В.Н. Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы / В.Н. Бурков, М.Б. Искаков, Н.А. Коргин // Проблемы управления. 2008. № 4. С. 38-47.
17. Бондарик, В.Н. Механизмы распределения ресурсов на основе неманипулируемых симметричных анонимных процедур голосования с делегированием / В.Н. Бондарик, Н.А. Коргин // Проблемы управления. 2012. № 5. С. 26-32.