

# Алгоритм построения моделей пространственных отношений на основе темпоральных графов

С.В. Еремеев<sup>а</sup>, В.С. Чижов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета, 602264, ул. Орловская 23, Муром, Владимирская область, Россия

## Аннотация

В статье разработан алгоритм, позволяющий устанавливать топологические отношения между объектами на карте и формировать матрицу смежности темпорального графа. Реализован поиск топологических отношений между пространственными объектами в разных слоях. Разработан метод сложения темпорального и статического графа. Реализован алгоритм формирования матрицы смежности темпорального графа при изменении типа связей, добавлении новых или удалении уже существующих объектов. В качестве результата реализации алгоритма приводится фрагмент карты и матрица отношений темпорального графа.

*Ключевые слова:* темпоральные графы; обработка изображений; векторная карта; геоинформационные системы

## 1. Введение

В современном мире геоинформационные системы (ГИС) составляют одну из фундаментальных основ становления информационного общества. ГИС применяются в различных сферах деятельности: транспорт, навигация, геология, география, военное дело и т.д.

На данный момент в ГИС все большую популярность находит применение теории графов [1-3]. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее - экономику, социологию, лингвистику и др. Существующие дома, сооружения, кварталы рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, линии электропередач - как рёбра. На таком графе можно производить различные вычисления, что позволяет, например, найти кратчайший объездной путь, спланировать оптимальный маршрут.

Часто теория графов используется для представления отношений между элементами сложных структур различной природы [4-6]. При этом данные отношения являются постоянными и не меняются во времени. Такие графы называются «статическими». Статический граф представляет собой совокупность множества вершин и множество рёбер, соединяющих вершины. Каждое ребро хранит вес, соответствующий типу отношений между вершинами, которые соединяют данное ребро. Но возникают ситуации, в которых отношения между элементами изменяются во времени. В этом случае «статические» графы неприменимы для их описания и моделирования.

В настоящее время для реализации такого подхода является использование темпорального графа, в котором связи между элементами (вершинами графа) изменяются во времени [7].

Темпоральные графы имеют широкие перспективы использования в ГИС. Однако разработка модели представления и использования темпоральных графов с учётом пространственных отношений между объектами остается актуальной задачей.

Темпоральным графом называется тройка  $G = (X, \{Y_t\}, T)$ , где  $X$  - множество вершин графа с числом вершин  $|X| = n$ ;  $T = \{1, 2, \dots, N\}$  - множество натуральных чисел, определяющих (дискретное) время;  $\{Y_t\}$  - семейство соответствий или отображений множества вершин  $X$  в себя в момент времени  $t \in T$ , т.е.  $\forall (t \in T) Y_t : X \rightarrow X$ . Причём, для различных моментов времени эти отображения, в общем случае, разные:

$$(\forall x \in X)(\forall t_1, t_2 \in T | t_1 \neq t_2)[Y_{t_1}(x) \neq Y_{t_2}(x)]$$

На рис. 1 изображен статический граф отношений, где  $A, B, C, D, E$  - объекты на карте,  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  - моменты времени, в которые появились топологические отношения между объектами (соседство, пересечение, вложенность и другие). При отображении объектов на карте в различные моменты времени может быть изменение их топологических связей.

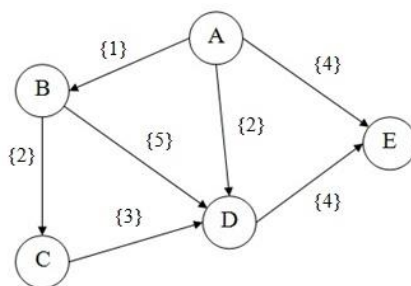


Рис. 1. Пример «статического» графа отношений объектов.

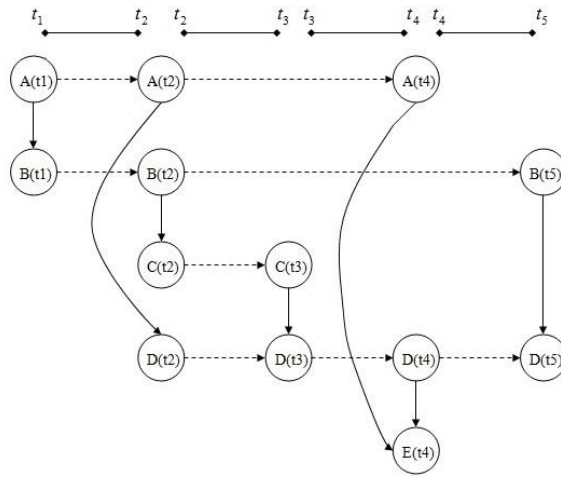


Рис. 2. Пример темпорального графа.

На рис. 2 представлен темпоральный граф, показывающий изменение топологических связей в течение времени, где  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  - моменты времени.

Данная работа посвящена реализации алгоритма, предназначенного для установления топологических отношений между объектами на карте и формирования модели темпорального графа на основе матрицы смежности. Одной из поставленных задач является разработка алгоритма сложения матриц смежности темпорального и статического графов.

## 2. Установление топологических отношений между пространственными объектами

На начальном этапе работы производится выбор слоёв, относительно которых будет произведен поиск топологических отношений, и типы отношений, по которым следует произвести поиск.

Для установления топологических отношений между объектами на карте используется поиск пространственных объектов, имеющих указанное пространственное отношение к заданному контуру.

Суть данного метода заключается в том, что при анализе каждого объекта производится вычисление пространственного отношения заданного контура с контурами форм других объектов, определяющими геометрию. Затем к вычисленному отношению применяется набор условий, на которые необходимо производить проверку. Если значения совпали, то объект считается удовлетворяющим поиску:

$$C = \{c_i : R(c_i, c_p) = 1\}, c_p \neq c_i,$$

где  $C_i$  - множество всех контуров карты,

$R(c_i, c_p)$  - отношение между контуром  $c_i$  и исследуемым контуром  $c_p$  ( $i, p = 1, 2, \dots, m$ ), где  $m$  - количество объектов на карте.

Результатом  $C$  является множество всех таких контуров, которые находятся в отношении с исходным контуром  $c_p$ .

Так как ГИС работает с огромными объемами данных, актуальной задачей стала оптимизация работы алгоритма. Для ускорения обработки данных применяется бинарный поиск.

Основная его идея заключается в поиске значения в диапазоне элементов отсортированного одномерного массива.

## 3. Сложение матриц смежности темпорального и статического графов

### 3.1. Изменение типа связи в темпоральном графе

В матрице смежности графов топологические отношения обозначаются так: соприкосновение – «1», пересечение – «2», содержит – «3», вложение – «4», близость – «5».

Для добавления текущей матрицы смежности в матрицу смежности темпорального графа используется следующая формула:

$$g_{i,j}^t = \begin{cases} g_{i,j}^{t-1} + g_{i,j}^t, & \text{если } \exists i, j \text{ в } t \text{ и } \exists i, j \text{ в } t-1 \\ g_{i,j}^t, & \text{если } \exists i, j \text{ в } t \text{ и } \bar{\exists} i, j \text{ в } t-1 \\ 6, & \text{если } \bar{\exists} i, j \text{ в } t \text{ и } \exists i, j \text{ в } t-1 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $g_{i,j}^{t-1}$  - тип связи в предыдущий момент времени,

$g_{i,j}^t$  - тип связи в текущий момент времени,

$i, j \in \{1..n\}$ , где  $n$  - количество объектов на карте.

В случае отсутствия объекта на карте в формуле (1) топологической связи присваивается значение «б».

Исходя из формулы (1) следует, что при сложении матрицы смежности темпорального графа и матрицы смежности статического графа производится проверка на существование объекта в текущий и предыдущий момент времени. Если топологические связи объекта не изменились, либо изменились только виды связей, то происходит сложение текущего момента времени с предыдущим. Если объект не существовал, то в текущем моменте времени создается тип связи. Если объект исчез, то происходит удаление типа связи.

Пусть  $G_1$  - матрица смежности в момент времени  $t_1$ ,  $G_2$  - матрица смежности в момент времени  $t_2$ , то итоговая матрица темпорального графа при сложении будет иметь следующий вид:

$$G_t = G_1 + G_2$$

На рис. 3 представлены матрицы смежности статического графа в момент времени  $t_1$  и  $t_2$ . В момент времени  $t_2$  произошло изменение топологической связи между объектом 1 и объектом 3. Далее представлена матрица смежности темпорального графа.

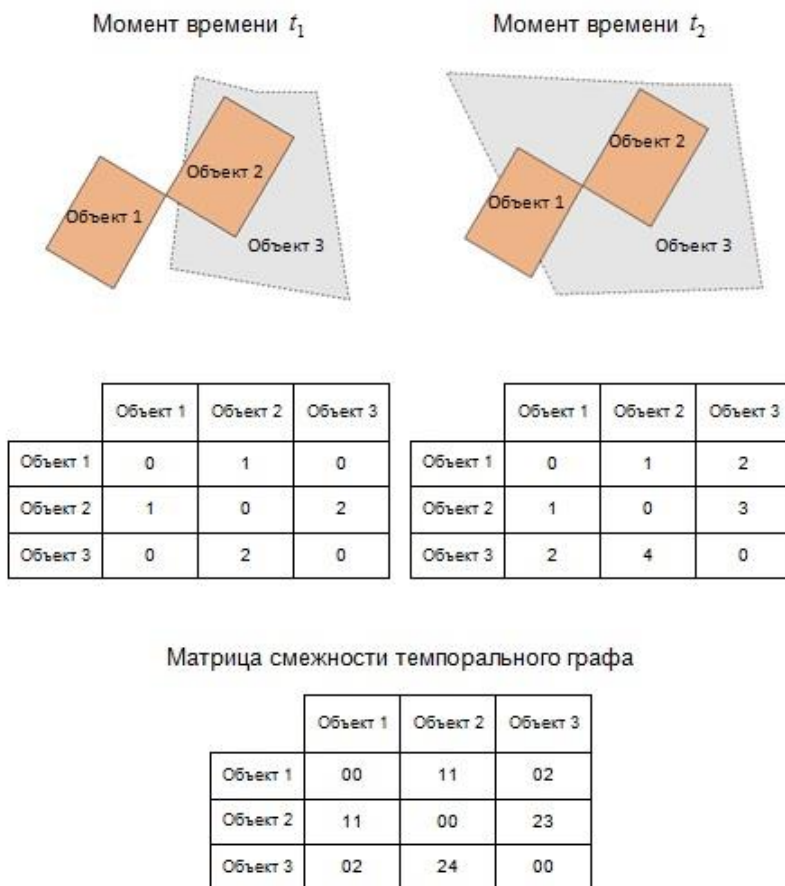


Рис. 3. Пример сложения матриц смежности темпорального и статического графов (изменение типа связи).

### 3.2. Удаление объекта в темпоральном графе

Для сложения матриц смежности темпорального и статического графов при удалении объекта разработан алгоритм, подразделенный на 2 этапа. Первый этап заключается в сравнении списков  $L_1$  и  $L_2$  объектов в темпоральном и статическом графах и в выявлении удаленных элементов. Далее элементы записываются в соответствующие списки.

$$\begin{cases} G_i[k,l] \in L_d, \text{ если } G_i[k,l] \in L_1 \text{ и } G_i[k,l] \notin L_2 \\ G_i[k,l] \in L_n, \text{ если } G_i[k,l] \in L_1 \text{ и } G_i[k,l] \in L_2 \end{cases}$$

где  $G_i[k,l]$  - объект на карте в текущий момент времени  $t$ ,

$L_d$  - список удаленных объектов,

$L_n$  - список не удаленных объектов.

Исходя из этого, матрица смежности статического графа  $G_t$  состоит из удаленных и не удаленных объектов. Следовательно, второй этап алгоритма заключается либо в добавление в матрицу смежности темпорального графа топологических связей не удаленных объектов, либо в обозначении факта удаления объекта и, соответственно, его топологических связей.

$$g_{i,j}^t = \begin{cases} G_{i,j}, & \text{если } X \in L_n \\ 0, & \text{если } X \in L_d \end{cases}, \quad (2)$$

где  $G_{i,j}$  - связь объекта, добавляемого в матрицу,

$X$  - объект на карте.

На рис. 4 показаны матрицы смежности статического графа в момент времени  $t_1$  и  $t_2$ . В момент времени  $t_2$  произошло удаление объекта 1, что повлекло за собой изменение матрицы смежности статического графа в момент времени  $t_2$ . Далее представлена матрица смежности темпорального графа, в которой показано, что в момент времени  $t_1$  объект 1 существовал, а в момент времени  $t_2$  был удален.

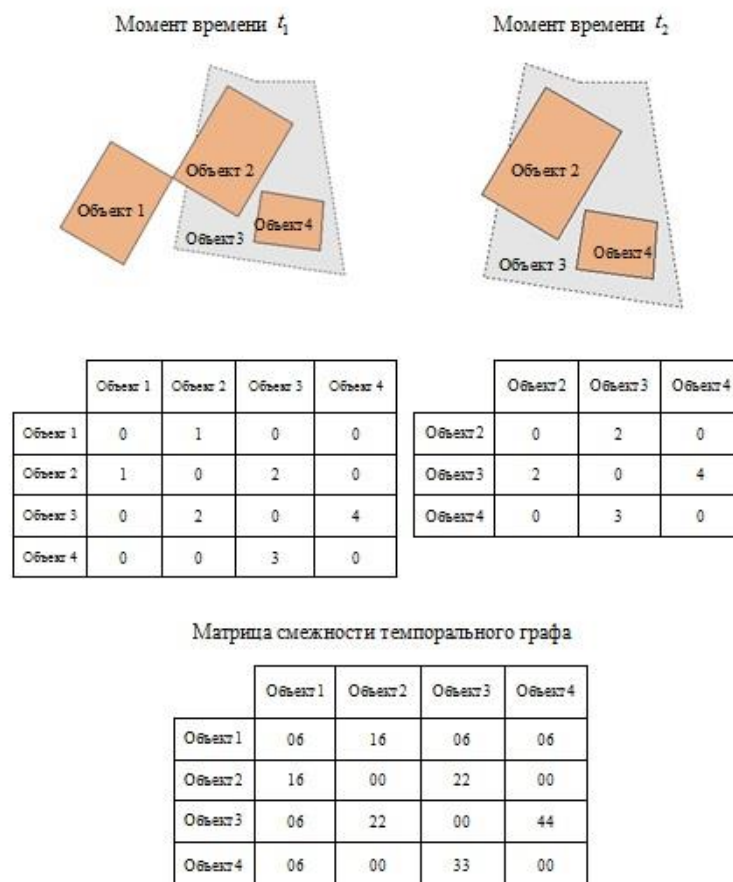


Рис. 4. Пример сложения матриц смежности темпорального и статического графов (удаление объекта).

### 3.3. Добавление объекта в темпоральном графе

Для сложения матриц смежности темпорального и статического графов при добавлении объекта разработан алгоритм, подобный алгоритму при удалении. Данный алгоритм также подразделен на 2 этапа. Первый этап заключается в сравнении списков  $L_1$  и  $L_2$  объектов в темпоральном и статическом графах и в выявлении добавленных элементов. Далее элементы записываются в соответствующие списки.

$$\begin{cases} G_t[k,l] \in L_a, & \text{если } G_t[k,l] \notin L_1 \text{ и } G_t[k,l] \in L_2 \\ G_t[k,l] \in L_n, & \text{если } G_t[k,l] \in L_1 \text{ и } G_t[k,l] \in L_2 \end{cases},$$

где  $G_t[k,l]$  - объект на карте в текущий момент времени  $t$ ,

$L_a$  - список добавленных объектов,

$L_n$  - список существующих объектов.

Исходя из этого, матрица смежности статического графа  $G_t$  состоит из добавленных и существующих объектов. Следовательно, второй этап алгоритма заключается либо в добавление в матрицу смежности темпорального графа топологических связей существующих объектов, либо в обозначении факта добавления топологических связей нового объекта и вычисляется по формуле (2).

Также стоит учитывать количество моментов времени, пройденных с начала построения матрицы смежности темпорального графа. Следовательно, вычислив количество моментов времени, производится добавление в элемент матрицы смежности нужное количество связей.

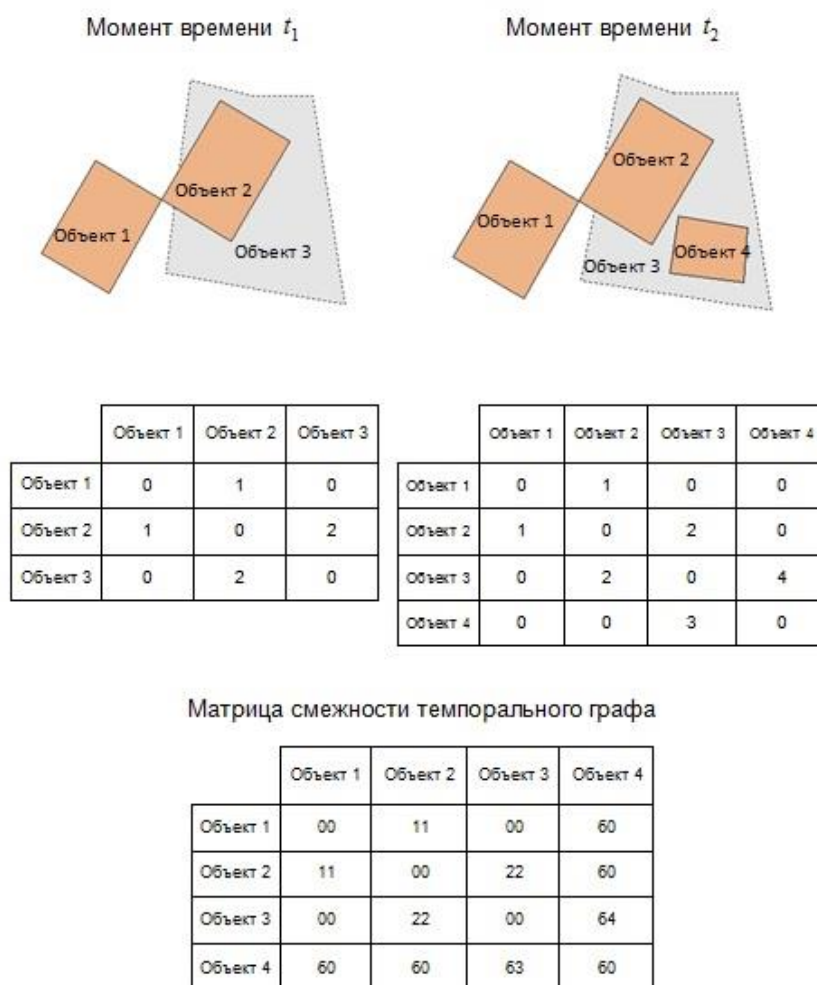


Рис. 5. Пример сложения матриц смежности темпорального и статического графов (добавление объекта).

На рис. 5 показаны матрицы смежности статического графа в момент времени  $t_1$  и  $t_2$ . В момент времени  $t_2$  произошло добавление объекта 4, что повлекло за собой изменение матрицы смежности статического графа в момент времени  $t_2$ . Далее представлена матрица смежности темпорального графа, в которой показано, что в момент времени  $t_1$  объект 4 не существовал, а в момент времени  $t_2$  был добавлен.

#### 4. Примеры использования темпоральных графов

Для рассмотрения примеров использования темпоральных графов взята тестовая карта и выбрано 4 типа топологических отношений: соприкосновение, пересечение, содержание, вложение.

На рис. 7 показано, как изменились отношения между объектами на карте в момент времени  $t_2$ . Произведена реконструкция здания и проложены две новые дороги. Следовательно, меняется и вид матрицы смежности темпорального графа, т.е. в матрицу смежности темпорального графа добавляется матрица смежности графа текущего момента времени.

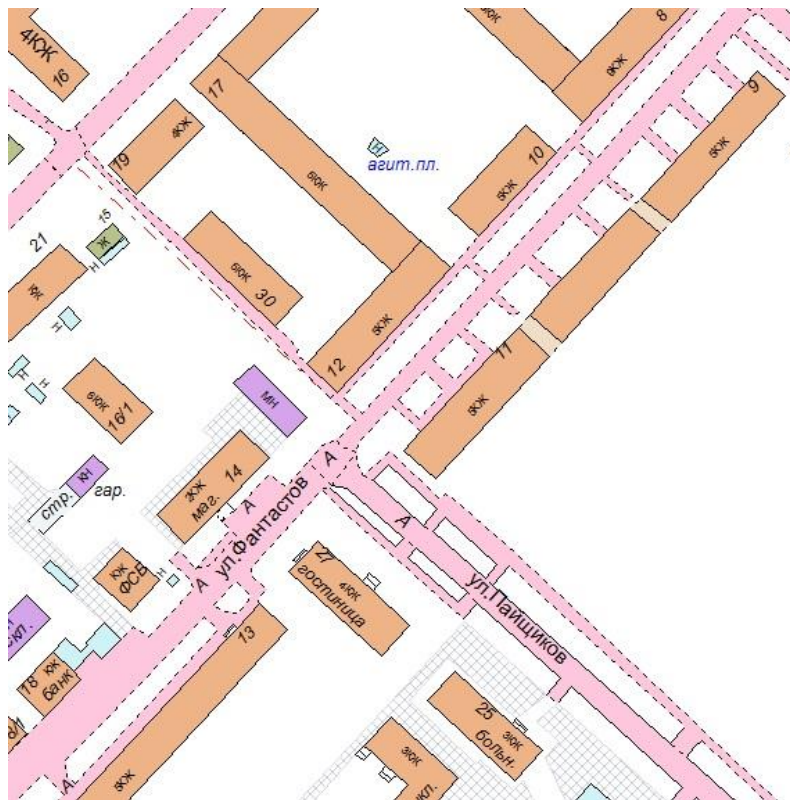


Рис. 6. Тестовая карта. Момент времени  $t_1$ .

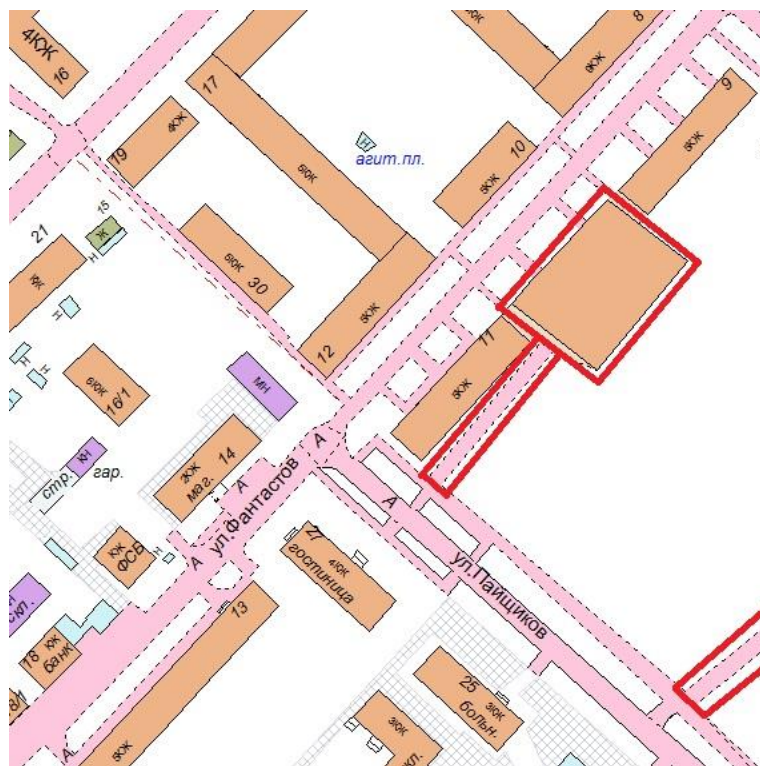


Рис. 7. Тестовая карта. Момент времени  $t_2$ .

На рис. 8 показано, как изменились отношения между объектами на карте в момент времени  $t_3$ . Построено новое здание, парковка, демонтирована старая постройка. Следовательно, меняется и вид матрицы смежности темпорального графа.

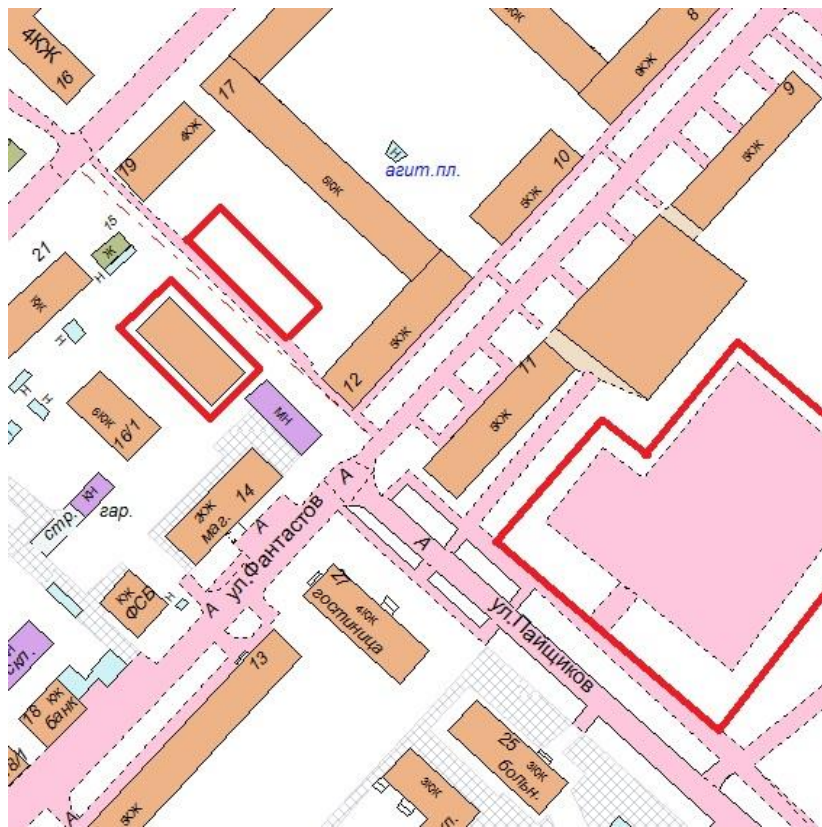


Рис. 8. Тестовая карта. Момент времени  $t_3$ .

## 5. Анализ эффективности алгоритмов

Исходя из анализа эффективности алгоритма установки топологических отношений, следует вывод, что сложность алгоритма равна  $O(n^2)$ . Следовательно, график зависимости времени обработки алгоритма  $t'$  от количества объектов на карте  $n$  показан на следующем рисунке:

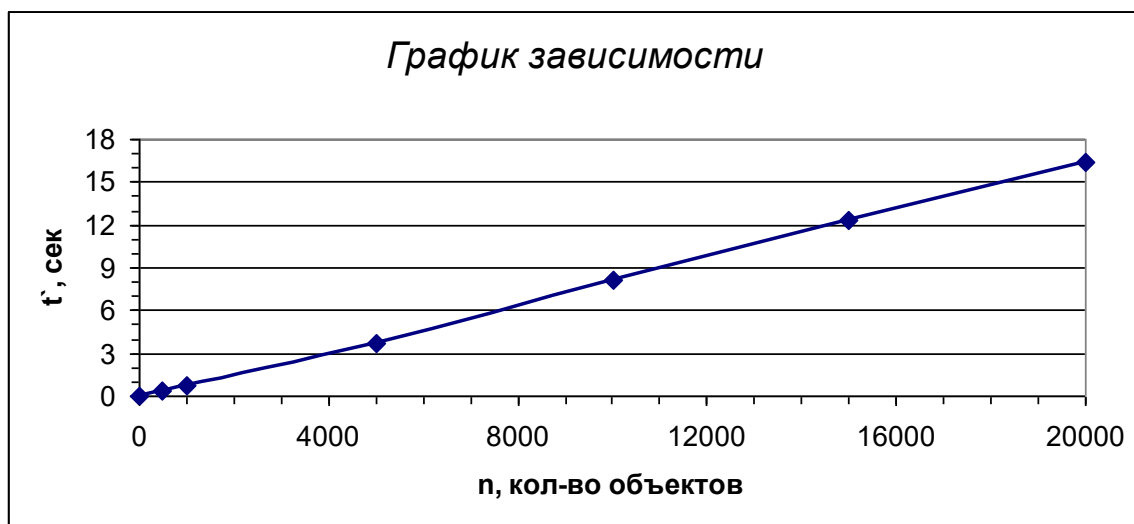


Рис. 9. График зависимости времени обработки  $t'$  от количества объектов  $n$ .

Анализ эффективности алгоритмов сложения матриц смежности темпорального и статического графов показывает, что сложность данных алгоритмов равна  $O(n^2)$  в случае с изменением типов связей в графе и  $O(n^3)$  в случае с добавлением или удалением объектов. Следовательно, график зависимости времени обработки алгоритма  $t'$  от количества объектов на карте  $n$  выглядит так:

## График зависимости

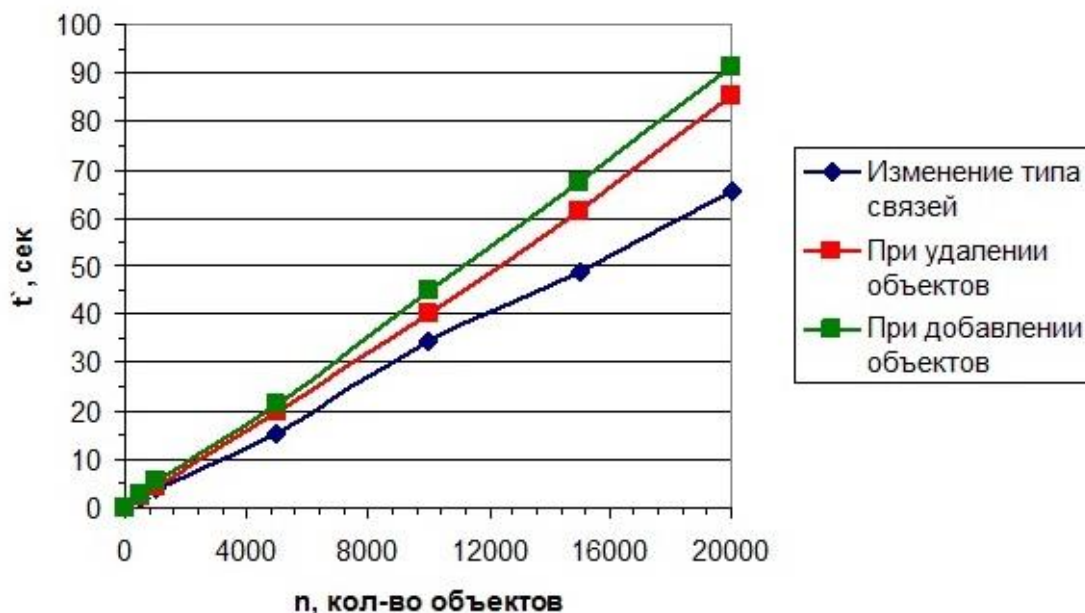


Рис. 10. График зависимости времени обработки  $t'$  от количества объектов  $n$ .

### 6. Заключение

В настоящее время традиционно используемые графовые модели в ряде случаев становятся неприемлемы постановкам задач в условиях динамичности. Геоинформационные модели не являются статичными. Изменение пространственных координат, временных меток, семантического содержания картографических объектов и изменения реального мира взаимообусловлены и предусматривают динамику геоинформационных моделей. Таким образом, можно видеть, что решение ряда задач с использованием геоинформационных моделей требует использования темпорального описания графа.

В статье разработан алгоритм построения моделей пространственных отношений на основе темпоральных графов. Сформирована модель темпорального графа на основе матрицы смежности. Подробно описан алгоритм добавления текущей матрицы смежности в матрицу смежности темпорального графа. Рассмотрены различные условия сложения матриц смежности (при изменении типов топологической связи, при добавлении или удалении объектов на карте).

Данный алгоритм полезен при реализации темпоральных графов для муниципальных карт.

### Литература

- [1] Еремеев, С.В. Метод представления информации о топологии карты в структуре идентификаторов пространственных объектов / С.В. Еремеев, Д.Е. Андрианов, Д.В. Титов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. №2. 2015. С. 99-103.
- [2] Еремеев, С.В. Построение и использование топологических отношений между группами пространственных объектов в геоинформационных системах / С.В. Еремеев, Д.Е. Андрианов, А.С. Веденин // Вестник РГРТУ. №1. 2014. С. 130-133.
- [3] Eremeev, S. V. Comparison of Urban Areas Based on Database of Topological Relationships in Geoinformational Systems / S. V. Eremeev, D. E. Andrianov, V. A. Komkov // Pattern Recognition and Image Analysis. 2015. Vol. 25. No. 2, pp. 314-320.
- [4] Берштейн, Л.С. Использование темпоральных графов, как моделей сложных систем / Л.С. Берштейн, А.В. Боженюк // Известия Южного федерального университета. Технические науки. Выпуск №4, том 105, 2010. С. 198-203.
- [5] Еремеев, С.В. Пространственно-временной анализ муниципальных карт // Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2012. №4. С. 52-57.
- [6] Деев, К.В. Сопоставление элементов разномасштабных карт / К.В. Деев, С.В. Еремеев // Геоинформатика. 2006. № 2. С. 54-57.
- [7] Vassilis Kostakos. Temporal Graphs // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2009. No. 6, pp. 1007-1023.