АЛГОРИТМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЦИКЛА ПРИ ПОЗАКАЗНОМ ПЛАНИРОВАНИИ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ

М.И. Гераськин, В.В. Егорова

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Рассматривается задача оптимального планирования производственных ресурсов по критерию производственного цикла для позаказных промышленных производств. На основе предположений о возрастании издержек и убывании цен с ростом заказов разработана дискретная модель динамической оптимизации с учетом ценовых и технологических ограничений. Получено оптимальное решение задачи планирования заказов, на основе которого разработан алгоритм оптимизации производственного цикла. Моделирование на материалах реальных производств подшипниковой промышленности России подтвердило работоспособность алгоритма.

Ключевые слова: задача оптимального планирования, динамическая модель, дискретная оптимизация, алгоритм планирования, производственный цикл.

Введение

Промышленное производство является детерминантом экономического роста экономики России, определяя индустриальный тип хозяйственной системы страны, поскольку в 2005-2014 гг. структурная доля этого показателя в валовом внутреннем продукте (ВВП) составляла порядка 60-65%, [1]. Динамика промышленного производства предопределяет тенденции ВВП и тесно коррелирует с темпами роста машиностроения, а также с трендами выпуска подшипниковой промышленности как базовой отрасли индустриального компонента ВВП. Российская промышленность в современных условиях хозяйствования перешла к позаказной системе планирования [2], при которой на передний план выступают проблемы обеспечения ритмичности бизнес-процесса, обобщенно характеризуемой длительностью производственного цикла. В частности, для ведущих предприятий подшипниковой промышленности – Самарского подшипникового завода (СПЗ) и Завода приборных подшипников (ЗПП), охватывающих 13-17% рынка отрасли в 2008-2014 гг. [3,4], производственные циклы в этот период достигали 210 (СПЗ) и 780 (ЗПП) дней.

В задачах оптимального планирования бизнес-процесса в промышленности критериями эффективности рассматривались прибыль [5,6] или длительность цикла [7-8], а как многокритериальная эта задача ставилась только в статической форме [9-12]. Задача оптимизация бизнес-процесса в динамике приводит к необходимости уточнения модели на основе учета отклонений производственных запасов и выпуска от среднегодовых трендов, вследствие чего формируемый на ее основе оптимальный план обеспечит существенное повышение эффективности использования запасов. Динамическая модель оптимизации производственного цикла рассматривается в дискретной постановке, поскольку планирование в промышленности осуществляется поквартально.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального планирования заказов производственных ресурсов фирмы по критерию производственного цикла:

$$\min F(u), \tag{1}$$

где F – длительность производственного цикла. Вектор параметров управления включает в себя объемы заказов ресурсов на различных стадиях производственного процесса

$$u = \{u_i^j, i = 1,2,3, j \in J_i\}.$$

В качестве ресурсов исследуются такие виды (обозначены индексом «i»), как материалы (i=1), незавершенное производство (i=2), готовая продукция (i=3), номенклатура которых обозначена индексом «j», $j \in J_i$.

Рассмотрим период планирования τ, подпериоды которого обозначим индексом «t», и введем критерий эффективности (1) в динамической форме по подпериодам:

$$F(u_t) = \frac{T_t}{C_t(u_t)}\left(u_{\Sigma t}^0 + \frac{u_{1t} + P_t(u_t) - C_t(u_t)}{2}\right),$$
$$t \in [1, \tau], u_{\Sigma t}^0 = \sum_{i=1,2,3} u_{it}^0, \tag{2}$$

где Tt – продолжительность подпериода (в днях); u_{it} – объемы заказов ресурсов в t-й подпериод периода τ; u_{it}^0 – остатки ресурсов на начало периода; $u_{\Sigma t}^0$ – суммарные остатки ресурсов на начало t-го подпериода; C, P – себестоимость выпуска и нематериальные производственные расходы за подпериод.

Динамика производственного процесса задана следующими рекуррентными соотношениями [12], определяющими зависимости остатков ресурсов на начало последующего подпериода от динамики заготовления и выпуска в предыдущий подпериод периода τ:

$$u_{1(t+1)}^0 = u_{1t}^0 + u_{1t} - u_{2t},$$
$$u_{2(t+1)}^0 = u_{2t}^0 + u_{2t} - u_{3t} + P_t(u_{1t}^0, u_{1t}),$$
$$u_{3(t+1)}^0 = u_{3t}^0 + u_{3t} - C_t(u_{1t}^0, u_{1t}). \tag{3}$$

Предположим наличие устойчивых трендов динамики объемов заказов на продукцию фирмы в зависимости от заказов и начальных остатков ресурсов в виде функций материалоемкости производства $P_t(u_{1t}^0, u_{1t})$ и материалоемкости выпуска продукции $C_t(u_{1t}^0, u_{1t})$, удовлетворяющих условиям вогнутости и ограниченного роста [13]:

$$P_{tu_{1t}^0}'(u_{1t}^0, u_{1t}) > 0, P_{tu_{1t}}'(u_{1t}^0, u_{1t}) > 0,$$
$$P_{tu_{1t}^0}''(u_{1t}^0, u_{1t}) < 0, P_{tu_{1t}}''(u_{1t}^0, u_{1t}) < 0,$$
$$C_{tu_{1t}^0}'(u_{1t}^0, u_{1t}) > 0, C_{tu_{1t}}'(u_{1t}^0, u_{1t}) > 0,$$
$$C_{tu_{1t}^0}''(u_{1t}^0, u_{1t}) < 0, C_{tu_{1t}}''(u_{1t}^0, u_{1t}) < 0. \tag{4}$$

Введем соответствующие (4) модели трендов в виде степенных функций

$$P_t\left(u_{1t}^0, u_{1t}\right) = B_P u_{10t}^{\beta_{P0}} u_{1t}^{\beta_P},$$
$$B_P > 0, \beta_P, \beta_{P0} \in (0,2), \tag{5}$$

$$C_t\left(u_{1t}^0, u_{1t}\right) = B_C u_{10t}^{\beta_{C0}} u_{1t}^{\beta_C},$$
$$B_C > 0, \beta_C, \beta_{C0} \in (0,2), \tag{6}$$

где $B_C, B_P, \beta_C, \beta_P, \beta_{C0}, \beta_{P0}$ – коэффициенты регрессионных моделей, ограничение $0 < \beta < 2$ наложено в связи с реальным характером эффекта расширения масштаба.

Также предположим наличие убывающих трендов цен материалов, номенклатуру которых обозначим индексом «i»

$$z_{1j} = z_{1j}\left(u_{1jt}\right), j \in J, z_{1ju}^{/} < 0, \tag{7}$$

моделируемых в виде степенных функций

$$z_{1j}\left(u_{1jt}\right) = A_j u_{1t}^{\alpha_j}, \alpha_j < 0, j \in J, \tag{8}$$

где A_j, α_j – коэффициенты регрессионных моделей, z_j - цена j-го ресурса (за единицу массы).

Учитываются следующие ограничения на управление:

$$U_t = \left\{ \begin{matrix} u_{1t} \in R^+ \left| u_{1t}^{\max}(N_t) \geq u_{1t} \geq u_{1t}^{\min}(N_t), \right. \\ u_{1t} \geq u_{1t}^{\min}(z_t) \end{matrix} \right\}, \tag{9}$$

где U_t – область допустимых значений u_{1t} в t-м подпериоде. Максимальные («max») и минимальные («min») значения заказов определены из условий:

$$u_{1jt}^{\max(\min)} = z_{jt} \sum_{l \in L} m_{jl} \left(N_{lt}^{\max(\min)} - u_{3lt}^0 - k_l \cdot u_{2lt}^0 \right), \tag{10}$$

где m_{jl} – массовый норматив расхода j-го ресурса на производство единицы продукции l-го типа; $N_l^{\max(\min)}$ – диапазон колебаний спроса на продукцию l-го типа; k_l - коэффициент выхода готового изделия l-го типа из НЗП. Ограничение по предельному уровню заготовительных издержек $u_{1t} \geq u_{1t}^{\min}(z_t)$ обусловлено ростом цены ресурсов по тренду (7) и рассчитывается [12] по формуле

$$u_{1jt}^{\min}\left(z_{jt}\right) = \left(-\frac{B_P \beta_P J^{\beta_P - 1}}{(\overline{\alpha} + 1)\ \overline{A}} \right)^{\frac{1}{\overline{\alpha} - \beta_P - 1}}, \tag{11}$$

где $\overline{\alpha}, \overline{A}$ – средние значения показателей.

Сформулируем задачу оптимизации заказов ресурсов по критерию производственного цикла

$$u_{1t}^{*} = \arg\min_{u_{1t} \in U_t} F(u_{1t}) . \qquad (12)$$

Отметим, что совместный анализ трендов (5), (6) показывает, что темпы роста нематериальных расходов и общих издержек должны удовлетворять соотношению

$$\beta_P < \beta_C + 1 , \qquad (13)$$

поскольку в противном случае ($\beta_P > \beta_C + 1$) рост нематериальных расходов должен значительно опережать рост себестоимости, что в промышленности, для которой характерна высокая материалоемкость, невозможно.

2. Алгоритм оптимизации цикла

Сформулируем решение задачи (12) в виде следующих утверждений, первое из которых определяет безусловный минимум цикла (2), а второе – минимум с учетом ограничения (9).

Утверждение 1: *минимум длительности производственного цикла (2) в t-м подпериоде при трендах (5), (6) с учетом (13) достигается для неотрицательного аргумента* $u_{1t}^{*} \geq 0$, *удовлетворяющего условиям*

$$-2u_{\Sigma t}^{0}\beta_C + (1-\beta_C)u_{1t}^{*} + B_P u_{10t}^{\beta_{P0}}(\beta_P - \beta_C)u_{1t}^{*\beta_P} = 0 , \qquad (14)$$

$$\begin{gathered} u_{1t}^{*} \in U_{1t} = \{(\beta_C > \beta_P) \cup \\ (\beta_C < \beta_P \cap \beta_C + 1 > \beta_P \cap \varphi > 0)\}, \end{gathered} \qquad (15)$$

где
$$\begin{gathered} \varphi = \beta_C\left[2(\beta_C + 1)u_{\Sigma t}^{0} + \beta_C - 1\right] u_{1t} + \\ + B_P u_{10t}^{\beta_{P0}} |\beta_C - \beta_P| (\beta_C + 1 - \beta_P) u_{1t}^{\beta_P} , \end{gathered}$$

символом U_{1t} обозначена область значений u_{1t}^{*}, соответствующих минимуму цикла.

Доказательство утверждения 1: из необходимого условия оптимальности (2)

$$\begin{gathered} F_{u_1}^{/} = -\beta_C \frac{Tu_{\Sigma}^{0}}{B_C u_{10}^{\beta_{C0}}} u_1^{-\beta_C - 1} + \frac{T}{2B_C u_{10}^{\beta_{C0}}}(1-\beta_C)u_1^{-\beta_C} + \\ + \frac{TB_P}{2B_C} u_{10}^{\beta_{P0}-\beta_{C0}}(\beta_P - \beta_C)u_1^{\beta_P - \beta_C - 1} = 0 \end{gathered}$$

получим уравнение (14) для определения значения u_1^{*}. Здесь и далее в доказательствах индекс «t» опущен. Достаточное условие минимума (2) $F_{u_1}^{//} > 0$ преобразуем к виду

$$\begin{gathered} \beta_C\left[2(\beta_C + 1)u_{\Sigma}^{0} + \beta_C - 1\right] u_1 + \\ + B_P u_{10}^{\beta_{P0}}(\beta_C - \beta_P)(\beta_C + 1 - \beta_P)u_1^{\beta_P} > 0 . \end{gathered} \qquad (16)$$

Поскольку для реальных условий по порядку величин $u_\Sigma^0 >> \beta_C$, то $2(\beta_C+1)u_\Sigma^0+\beta_C >> 1$; поэтому на знак (16) влияет только соотношение β_C, β_P во втором слагаемом. С учетом диапазонов изменения β_C, β_P, определенных (5), (6), условие (16) выполняется при

$$\begin{cases}\beta_C > \beta_P \cup [\beta_C < \beta_P \cap \beta_C + 1 < \beta_P]\ \forall u_1^* \ge 0,\\ \beta_C < \beta_P \cap \beta_C + 1 > \beta_P \cap \varphi(\beta_C, \beta_P, u_\Sigma^0, u_1) > 0,\end{cases}$$

где
$$\varphi(\beta_C, \beta_P, u_\Sigma^0, u_1) = \beta_C\left[2(\beta_C+1)u_\Sigma^0 + \beta_C - 1\right] u_1 + \\ + B_P u_{10}^{\beta_{P0}} |\beta_C - \beta_P| (\beta_C + 1 - \beta_P) u_1^{\beta_P}.$$

С учетом (13) последнее условие имеет вид (15).

Уравнение (14) имеет единственное решение, поскольку оно задает функцию $\Phi(u_{1t}) = 0$, которая монотонна при выполнении условия (15), так как при этом $\Phi'_{u_{1t}} > 0$. Неотрицательность решения (14) гарантировать нельзя, однако, если $u_{1t}^* < 0$, то приняв $u_{1t}^* = 0$, получим решение, соответствующее минимуму (12), как будет показано ниже.

Утверждение 2: *решение задачи (12) имеет вид*

$$u_{1t}^{opt} = \max\left\{\min\left\{u_{1t}^*, u_{1t}^{\min}(N_t), u_{1t}^{\min}(z_t)\right\}, u_{1t}^{\max}(N_t)\right\}, \tag{17}$$

где u_{1t}^* определено по (14).

Доказательство утверждения 2: запишем функцию Лагранжа для задачи (11) в виде

$$L = F(u_1) + \lambda_1\left(u_1^{\min}(N) - u_1\right) + \lambda_2\left(u_1^{\max}(N) - u_1\right) + \\ + \lambda_3\left(u_1^{\min}(z) - u_1\right),$$

дифференцируя которую, получим систему необходимых условий оптимальности

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \frac{\partial F(u_1)}{\partial u_1} - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = u_1^{\min}(N) - u_1 \le 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = u_1^{\max}(N) - \\ - u_1 \ge 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = u_1^{\min}(z) - u_1 \le 0. \tag{19}$$

При выполнении (19) как строгих неравенств решением системы (18), (19) будет вектор множителей Лагранжа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, следовательно, из (18) следуют необходимые условия оптимальности $\frac{\partial F(u_1)}{\partial u_1} = 0$, записанные в форме (14) для определения оптимума критерия без ограничений u_1^*, то есть при этом $u_1^* = u_1^{opt}$. При выполнении (19) как строгих равенств решение системы (18), (19) удовлетворяет условиям

$$u_1 = u_1^{\min}(N) \cup u_1 = u_1^{\max}(N) \cup u_1 = u_1^{\min}(z),$$

которые формально запишем в виде (17). Достаточное условие экстремума в задаче (12) выполняется, если достаточное условие (15) определяет диапазон $u_1^{opt} \in U_1$.

Решение (17) определяет оптимум цикла как минимальное значение из u_{1t}^*, $u_{1t}^{\min}(N_t), u_{1t}^{\min}(z_t)$, поэтому, если из решения (14) получено $u_{1t}^* < 0$, то выбор значения $u_{1t}^* = 0$ отвечает (17).

Оптимум цикла (17) позволяет сформировать алгоритм динамического оптимального планирования заказов ресурсов по критерию производственного цикла, который сводится к следующей последовательности операций.

1. Формирование регрессий (5), (6), (8).

2. Задание номера подпериода t=1.

3. Задание границ спроса в t-м подпериоде $N_{lt}^{\max(\min)}$ и определение границ области допустимых управлений (10), (11).

4. Определение безусловного оптимума путем численного решения (14). Если (14) не имеет неотрицательного решения, то принимается $u_{1t}^* = 0$. Проверка условия (15) для найденного значения u_{1t}^*, в случае невыполнения которого также принимается $u_{1t}^* = 0$.

5. Нахождение условного оптимума (17).

6. Расчет параметров состояния $P_t(u_{1t}^0, u_{1t})$, $C_t(u_{1t}^0, u_{1t})$ по функциям (5), (6) и остатков ресурсов на начало следующего подпериода по формулам (3).

7. Проверка условия $t+1 \le \tau$ и переход к следующему подпериоду $t \equiv t+1$, начиная с шага 3.

Для реализации алгоритма необходимо, чтобы множество допустимых управлений было не пусто $U \ne \varnothing$, что обеспечено в постановках реальных задач производственного планирования; требование $u_{1t}^* \ge 0$ и выполнение условия (15) не являются обязательными.

3. Моделирование оптимизации цикла

Сформируем модели трендов (5), (6), (8) на основе данных о квартальной динамике показателей ОАО «СПЗ» и ОАО «ЗПП» за 2011-2014 гг. с использованием алгоритма метода наименьших квадратов: $P = 2{,}6u_{10}^{0{,}08}u_1^{0{,}56}$, $C = 0{,}6u_{10}^{0{,}27}u_1^{0{,}76}$, $z_1 = 205u_{11}^{-0{,}3}$, $z_2 = 105u_{12}^{-0{,}2}$.

Адекватность моделей подтверждается оценками коэффициента детерминации, превышающего 0,93.

Результаты оптимизации (табл. 1) показывают сокращение длительности производственного цикла, произошедшее за счет уменьшения объемов заказов и соответствующего снижения остатков ресурсов по кварталам планового года, а также суммарно за год с 286 до 246 дней.

Табл. 1. Результаты оптимизации производственного цикла (тыс. руб.)

t	u_{1t}^0	u_{2t}^0	u_{3t}^0	u_{1t}	u_{2t}	u_{3t}	P_t	C_t	F_t, дней
1	120 003	57 057	156 440	41 155	51 443	121 572	71 681	118 750	54
2	109 715	58 609	159 262	38 514	48 142	113 379	66 219	122 859	56
3	100 086	59 591	149 782	35 461	44 327	91 754	72 645	113 517	69
4	91 221	84 809	128 019	40 309	50 386	106 485	73 257	117 383	67
Фактическая длительность производственного цикла за 2015 г.									286
Длительность производственного цикла для 2015 г. по динамической модели									246

Заключение

Разработана модель динамической оптимизации производственных циклов промышленных производств с учетом ограничений, обусловленных объемами заказов покупателей и ценовой политикой поставщиков материалов. Модель производственного цикла базируется на гипотезах о постоянстве трендов производственных издержек и цен от вариаций заказов и остатков ресурсов, подтвержденных в рамках численного эксперимента. Понижение достоверности результатов моделирования вследствие увеличения числа прогнозируемых переменных компенсируется повышением адекватности модели особенностям динамики производственного процесса.

Получено выражение оптимума цикла, на основе которого разработан алгоритм численной дискретной оптимизации динамического процесса планирования заказов ресурсов. Оптимальность плановых заказов в каждый момент времени планового периода обосновывает оптимальность формируемой в результате программы закупок. Численное моделирование, проведенное на основе информации о динамике технико-экономических показателей реальных производств подшипниковой промышленности России, подтвердило работоспособность алгоритма. Потенциальная сфера применения разработок охватывает широкий спектр промышленных предприятий России, бизнес-процесс которых основан на позаказном способе планирования и характеризуется устойчивыми трендами выпуска и издержек.

Литература

1. Сайт Росстата РФ [Электронный ресурс]: http://www.gks.ru.
2. Оглезнев, Н. А. Организация и управление процессами труда и производства на заводах машиностроительного профиля / Н.А. Оглезнев, В.Г. Засканов, Г.С. Филин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007.
3. Сайт ООО «Завод приборных подшипников» [Электронный ресурс]: http://www.mbf-samara.ru.
4. Сайт ОАО «Самарский подшипниковый завод» [Электронный ресурс]: http://www.spzgroup.ru
5. Бражников, М. А. Моделирование календарных планов сборочных процессов в условиях машиностроительного производства [Текст] / М. А. Бражников // Вестник Самарского государственного технического университета. – 2004. - №26. – С. 165-173.
6. Faik Bilgili. Business cycle co-movements between renewables consumption and industrial production: A continuous wavelet coherence approach // Renewable and sustainable energy reviews. 2015.V.52. P.325-332.
7. Грибанова, Е. Б. Алгоритмические имитационные модели управления материальными запасами на складе [Текст] / Е. Б. Грибанова, А. А. Мицель // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – №8 – С. 201-206.

8. Колодин, Д. О. Совершенствование определения потребности в оборудовании в условиях единичного производства на основе модели производственного цикла [Текст] / Д. О. Колодин // Электронное научное издание "Актуальные инновационные исследования: наука и практика". - 2009. - №2. - http://www.actualresearch.ru
9. Buchert T. Multi-criteria decision making as a tool for sustainable product development – benefits and obstacles// Procedia CIRP. –2015– volume 26. – p. 70-75.
10. Domingues, A.R. Applying multi-criteria decision analysis to the life-cycle assessment of vehicles//Journal of cleaner production.-2015.- volume 12. – p. 45-48.
11. Гераськин, М.И. Статическая оптимизация производственных циклов на предприятиях подшипниковой промышленности [Текст] / М. И. Гераськин, В. В. Егорова// Вестник Самарского государственного экономического университета. – 2014. –№11 (121). – С.53-60.
12. Гераськин, М.И. Оптимальные механизмы планирования позаказного производства по финансовым и временным критериям / М.И. Гераськин, В.В. Егорова // Управление большими системами - № 58. М.: ИПУ РАН, 2015. С. 179-212.
13. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. М. Наука. 1986.