

РОБАСТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО МАЛОМУ ЧИСЛУ НАБЛЮДЕНИЙ

В. А. Фурсов

1. Постановка задачи. Рассматривается задача параметрической идентификации линейных по параметрам моделей типа регрессии с детерминированными независимыми переменными:

$$Y = Xc + \Xi \quad (1)$$

где Y - вектор зависимой переменной размерности $p \times 1$, представляющий собой p наблюдений значений y ; X - матрица $p \times m$, $\text{Rank}(X) = m$, элементы которой - значения m независимых переменных; $c^m \in R$ - подлежащий оцениванию вектор неизвестных параметров; $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p]^T$ - вектор случайных ошибок. Модель (1) широко используется в различных приложениях, в частности, в задачах определения линейных искажений, вносимых оптическими системами [1].

Если число наблюдений невелико (p не намного превышает m), "хорошие" асимптотические свойства традиционно используемых методов: наименьших квадратов (МНК) и максимального правдоподобия (ММП) становятся малообоснованными. Если вдобавок в последовательности ошибок $\{\xi\}$ имеются аномальные, указанные оценки вообще непригодны. Тогда строят, так называемые, робастные, в частности, минимаксные оценки. Однако, традиционно используемая для их обоснования аргументация [2] также неубедительна, поскольку о классе возможных распределений, часто, также ничего определенного сказать нельзя. Наиболее подходящими в данном случае представляются адаптивные робастные процедуры, настраивающиеся на конкретный протокол наблюдений. Обычно, эти процедуры строятся в виде различных эвристических инженерных дополнений типа правила "трех сигм", в какой-то мере, обеспечивающих защищенность от аномальных ошибок, но недостаточно теоретически обоснованных.

В настоящей работе используется алгебраический подход. В частности, развиваются идеи качественной теории идентификации [3], с использованием результатов которой обосновывается адаптивная стабильная процедура типа итерационного МНК с перестраиваемой весовой матрицей. Показано, что весовая

матрица, приводящая к увеличению точности, по крайней мере, существует. Получены соотношения типа неравенств и оптимальные решения для определения элементов диагональной весовой матрицы.

2. Основные результаты Для характеристики точности идентификации используется скалярная величина [2]:

$$\|\Delta \hat{c}\|_{\epsilon}^2 = \|c - \hat{c}\|_{\epsilon}^2 = \Xi^T X [X^T X]^{-2} X^T \Xi, \quad (2)$$

где $\Delta c = [X^T X]^{-1} X \Xi$, а $[X^T X]^{-2}$ означает $[X^T X]^{-1} [X^T X]^{-1}$.

Аналогичной величиной

$$\|\Delta c\|_{\epsilon}^2 = \|c - \hat{c}\|_{\epsilon}^2 = \Xi^T X [X^T X]^{-2} X^T \Xi \quad (3)$$

будем характеризовать точность при использовании набора данных, полученных из исходных по правилу. $Y = GY$, $X = GX$, $\Xi = G\Xi$. Ясно, что при таком преобразовании равенство в (1) сохраняется, а $\Delta c = [X^T X]^{-1} X^T \Xi$.

Теперь поставим следующий вопрос: существует ли матрица G , для которой

$$\|\Delta c\|_{\epsilon}^2 < \|\Delta \hat{c}\|_{\epsilon}^2. \quad (4)$$

Из соотношений (2),(3) ясно, что это неравенство выполняется при любых Ξ , если имеет место положительная определенность матрицы

$$B = X [X^T X]^{-2} X^T - G^T X [X^T X]^{-2} X^T G \quad (5)$$

Введем в рассмотрение ортонормированную $p \times p$ матрицу $T = [T_1; T_0]$.

Здесь матрица T_1 размерности $p \times m$ составлена из нормированных собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям матрицы XX^T , а T_0 - $p \times (p-m)$ матрица нормированных векторов, соответствующих нулевым собственным значениям той же матрицы. Такая матрица всегда существует, причем

$T_1 = XF\Lambda^{-1/2}$, где F - $m \times m$ матрица ортогонального преобразования: $F^T F = FF^T = E_m$, $F^T X^T X F = \Lambda$, а Λ - диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $X^T X$.

Применяя к матрице В, заданной соотношением (5) ортогональное преобразование вида $T^T B T$, с учетом того что [4] $T^T X [X^T X]^{-1} X^T T_x = \Lambda^{-1}$, получаем

$$K = T^T B T = \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_0^T A T & T_0^T A T_0 \\ T_0^T A T & T_0^T A T_0 \end{bmatrix},$$

где $\dot{A} = G^T \dot{O} [\dot{O}^T \dot{O}]^{-1} \dot{O}^T G$.

Можно показать, что $T_0^T A T_x = \Lambda^{-1}$. Следовательно

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda^{-2} F^T C T_0 \\ T_0^T C^T F \Lambda^{-2} & -T_0^T C^T C T_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

где $C = X [X^T X]^{-1} X G$.

Матрица К симметрическая, поэтому все ее собственные значения вещественны. Для нас важным является тот факт, что она не может быть ни положительно, ни отрицательно определенной, ввиду наличия нулевого блока $m \times m$ в левом верхнем углу. Это означает, что не существует матрицы преобразования G, которая приводила бы к повышению (или напротив к уменьшению) точности оценок регрессии в смысле критерия (2) при произвольном векторе ошибок Ξ , а в n-мерном пространстве ошибок всегда существует множество Ω векторов $\Xi \in \Omega = \{ \Xi : \|\Lambda C \Xi\|_E^2 \leq \|\Lambda c\|_E^2 \}$. Другими словами, для произвольного вектора Ξ всегда можно подобрать матрицу линейного преобразования так, что при этом повышается (в худшем случае сохраняется достигнутая) точность оценивания.

3. Построение алгоритмов идентификации. Общая схема рассматриваемого класса алгоритмов следующая. На первом шаге ($k=1$) вычисляется оценка МНК $\hat{c}_k = [X^T X]^{-1} X^T Y$. С использованием полученного начального приближения c_1 вычисляется вектор невязок: $\Psi_1 = Y - X \hat{c}_1$, и формируется весовая матрица $G_1 = G(\Psi_1)$. Затем строится новая оценка $\hat{c}_k = [X^T X]^{-1} X^T Y$, ($k=2$), где $Y = G_1 Y$, $X = G_1 X$ и т.д. Процесс останавливается, если $k \geq k_{lim}$ или $\|\hat{c}_{k+1} - \hat{c}_k\| \leq \delta$, где δ - заданное положительное число. Различные модификации описанного алгоритма могут быть связаны лишь с различными процедурами выбора весовой матрицы G_k .

С точки зрения простоты реализации целесообразно ограничиться классом диагональных вещественных матриц. Можно показать, что для этого класса матриц, все блоки матрицы K , фигурирующей в (6) становятся нулевыми, если $G = \alpha E$, где α - скаляр. Это говорит о том, что нормировка матрицы G , вообще говоря, не имеет значения. Из очевидных соображений примем следующее соглашение относительно нормировки:

$$\sum g_i = n, \quad g_i > 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

Теперь поставим задачу: определить G : $Q(G) = \min_{G \in \Omega} Q(G)$ при условии выполнения (7). Для одного частного случая $Q(G) = \|G\Psi\|_{\epsilon}^2$ сформулированная задача решена в [4]. Последовательность практически весьма полезных процедур получается при задании семейства критериев:

$$Q(G) = \sum g_v |\epsilon_v|^{-v}, \quad v = \overline{1, 2, \dots}$$

При этом для вычисления весовых коэффициентов получаются соотношения вида

$$g_v = g_0 |\epsilon_v|^{-v}, \quad v = \overline{1, 2}, \quad (8)$$

где $g_0 = n(\sum g_v)^{-1}$.

Описанный алгоритм с перестраиваемой от итерации к итерации весовой матрицей апробировался при решении задачи идентификации оптического канала [1]. Алгоритм реализован в виде трехшаговой процедуры, а весовые элементы вычислялись по соотношениям типа (8) при $v = 0, 1, 2$. Одна из модификаций алгоритма использовалась также для обработки данных измерений температуры вращающихся объектов. Результаты приведены в статье (Васин Н.Н., Петров А.Ю., Фурсов В.А.) настоящего сборника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fursov V.A. Identification of optical distorting systems with selecting image informative fragments Workshop on Digital Image Processing and Computer Graphics. Proceedings SPIE. - 1994. -. 2363.

2. Шамриков Б.М. Сравнительный анализ точности параметрической идентификации динамических объектов в разомкнутых и замкнутых автоматических системах - Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1986 N 3, с. 143-150

3. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1984 г.

4. Фурсов В.А. Анализ точности и построение алгоритмов идентификации по малому числу наблюдений - Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, N 6, 1991 г.

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ НА БАЗЕ ПК ДЛЯ ЗАДАЧ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Д. Г. Черясов

Адекватное представление процессов сложной имитационной модели в виде динамических зрительных образов позволяет не только обеспечить новое качество процессов моделирования, но и в отдельных случаях выявить нетривиальные, скрытые зависимости и взаимодействия между компонентами системы. В этом отношении динамическая визуализация имитационных процессов должна рассматриваться как разновидность когнитивной графики. Построение изображения можно описать формулой $I=G(W)$, где I - изображение, G - функция отображения, а W - модель мира. Нас интересует случай, когда $W=W(t)$, следовательно, и $I=I(t)$, где t - время.

Таким образом, построение изображения I есть создание фильма (компьютерная анимация). Ниже кратко рассматриваются некоторые системы, направленные на создание компьютерной анимации (назовем их СКА), с точки зрения компьютерного представления мира.

Каждая из СКА всегда включает систему моделирования мира (СММ) и систему отображения, в нашем случае являющуюся системой анимации (СА). СА и СММ очень тесно связаны и обычно должны рассматриваться вместе. Внутри СММ обычно можно выделить отдельные объекты.

Условно на множестве существующих СКА можно выделить *системы видеографики* (фильмы для переноса на видео), *иллюстрационные системы* (фильмы для использования в компьютерных приложениях) и *имитационно-*