Ю.Л. Файницкий

ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ

Принятые обозначения

x – продольная координата, связанная с потоком и отсчитываемая вдоль пластины от оси симметрии потенциального течения; x' – продольная координата, связанная с пластиной; y – нормальная координата; t – время; u – продольная составляющая скорости жидкости; v – нормальная составляющая скорости; T – температура жидкости; a – амплитуда колебаний пластины; ω – частота колебаний; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; σ – число Прандтля; b, c, v_w, T_1, T_∞ – константы.

Поперечное обтекание непроницаемой пластины, колеблющейся в своей плоскости, изучалось в работах [1] – [3]. В настоящей статье аналогичное явление рассматривается в предположении, что пластина пористая.

Пусть, как и в [3], температура поверхности является линейной функцией продольной координаты x'

$$T\big|_{y=0} = T_1 + bx'$$

и

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{b(\omega)}{\omega} = const .$$

Тогда движение несжимаемой жидкости и распределение температур в ней могут быть описаны системой

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} ;$$

$$u/_{y=0} = ae^{i\omega t}; \quad v/_{y=0} = v_w;$$

$$u/_{y\to\infty} = U = cx;$$

$$T/_{y=0} = T_1 + bx + i\frac{ab}{\omega}e^{i\omega t};$$

$$T/_{y\to\infty} = T_\infty .$$

Подобно [I] – [3], представим решение этой системы в виде

$$u = cxf'(\eta) + ae^{i\omega t}\Phi(\eta);$$

$$v = -\sqrt{cx}\, f(\eta) \qquad \left(\eta = \sqrt{\frac{c}{\nu}}\, y\right);$$

$$T = T_0 + i\frac{ab}{\omega}\vartheta(\eta)e^{i\omega t}.$$

Здесь $cxf'(\eta)$ и T_0 – стационарные составляющие продольной скорости и температуры. После соответствующих подстановок получим для искомых функций $\Phi(\eta)$ и $\vartheta(\eta)$

$$\Phi'' + f\Phi' - f'\Phi = i\frac{\omega}{c}\Phi; \tag{I}$$

$$\vartheta'' + \sigma f\vartheta' = i\sigma\frac{\omega}{c}\vartheta; \tag{2}$$

$$\Phi/_{\eta=0} = 1; \ \Phi/_{\eta\to\infty} = 0; \ \vartheta/_{\eta=0} = 1; \quad \vartheta/_{\eta\to\infty} = 0, \tag{3}$$

где $f(\eta)$ удовлетворяет условиям

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0;$$

$$f|_{\eta=0} = -\frac{v_w}{\sqrt{c\nu}}; \quad f'|_{\eta=0} = 0; \quad f'_{\eta\to\infty} = 1.$$

Система (I) - (3) не отличается от соотношений, полученных в работах [I] - [3]. Тем не менее, примененные там методы анализа в данном случае оказываются неэффективными, поскольку существенно используют условие $f|_{\eta=0} = 0$. Более целесообразным представляется подход, намеченный Вюстом [4], который решал уравнение типа (2). Учитывая, что Φ и ϑ являются комплексными функциями действительного аргумента η

$$\Phi = X(\eta) + i\,Y(\eta);$$
$$\vartheta = M(\eta) + i\,N(\eta),$$

перепишем (I) - (3) в форме

$$X'' + fX' - f'X = -\frac{\omega}{c}Y; \qquad Y'' + fY' - f'Y = \frac{\omega}{c}X;$$
$$M'' + \sigma f M' = -\sigma\frac{\omega}{c}N; \qquad N'' + \sigma f N' = \sigma\frac{\omega}{c}M;$$
$$X|_{\eta=0} = 1; \; X|_{\eta\to\infty} = 0; \quad Y|_{\eta=0} = 0; \; Y|_{\eta\to\infty} = 0;$$
$$M|_{\eta=0} = 1; \; M|_{\eta\to\infty} = 0; \quad N|_{\eta=0} = 0; \; N|_{\eta\to\infty} = 0.$$

Для интегрирования этой системы удобно применить метод Ньютона. При отыскании нулевого приближения могут быть использованы данные работ [I] - [3].

Полученные таким путем профили нестационарной составляющей скорости и температуры приведены на рис. 1 - 6. Амплитуды колебаний указанных величин монотонно убывают по мере удаления от поверхности, причем тем быстрее, чем больше частота и меньше параметр вдува $v_w/\sqrt{c\nu}$. На рис. 7 - 8 представлены действительные и мнимые части нестационарных компонент напряжения трения и теплового потока. Характер их изменения с частотой при отличном от нуля значении параметра вдува аналогичен соответствующей закономерности для непроницаемой пластины ($V_w/\sqrt{c\nu}=0$). Возрастание параметра $\frac{V_w}{\sqrt{c\nu}}$ приводит к существенному уменьшению амплитуд теплового потока и напряжения трения.

Все рассмотренные зависимости являют пример полного подобия гидродинамических и тепловых процессов. В периодических течениях такое подобие, как правило, не соблюдается, так как обычно изучаются движения жидкости, поле скоростей которой подвергается непосредственному возмущению на одной из границ. Поле же температур возмущается лишь за счет изменения скорости. В результате амплитуда напряжения трения бесконечно возрастает с частотой, а амплитуда теплового потока стремится к нулю.

В явлении, рассматриваемом в настоящей работе, поле температур, как и поле скоростей, подвергается гармоническому возмущению на внутренней границе течения. Поскольку механизмы распространения колебаний скорости и температуры аналогичны, подобные изменения граничных условий, естественно, приводят к одинаковой реакции полей.

Аналитическим отражением этого факта является близость формы соотношений (I) и (3), которая особенно очевидна при σ = I. В частности, когда $\omega \to \infty$, основную роль в уравнениях (I) - (2) играют члены, содержащие высшую производную и параметр ω. В этом случае, если σ = I, уравнения (I) и (2) тождественны, так что при достаточно высокой частоте имеет место не только качественное сходство, но и количественное совпадение функций $\Phi(\eta)$ и $\vartheta(\eta)$.

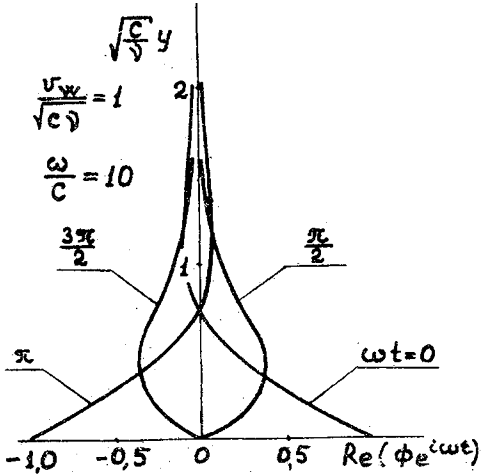

Рис.I. Профили нестационарной составляющей окорости

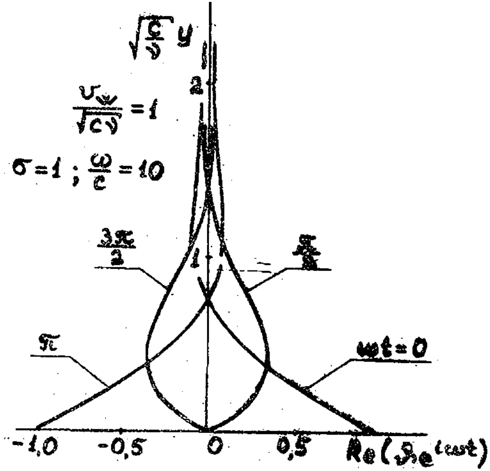

Рис.2. Профили нестационарной составляющей температуры

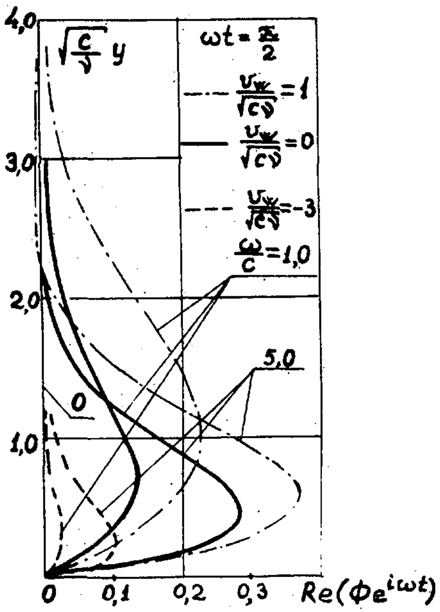

Рис.3. Влияние вдува (отсоса) на профиль нестационарной составляющей скорости при $\omega t = \pi/2$

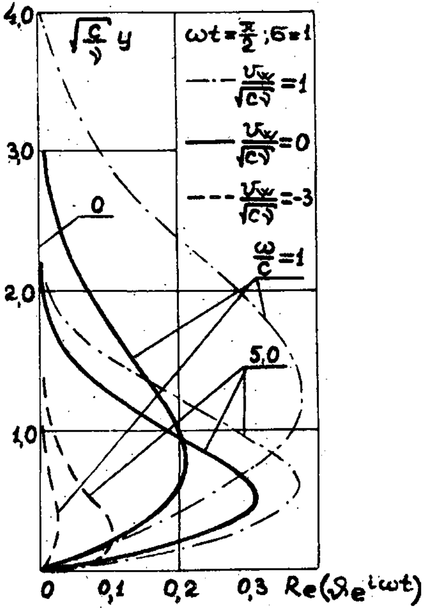

Рис.4. Влияние вдува (отсоса) на профиль нестационарной составляющей температуры при $\omega t = \pi/2$

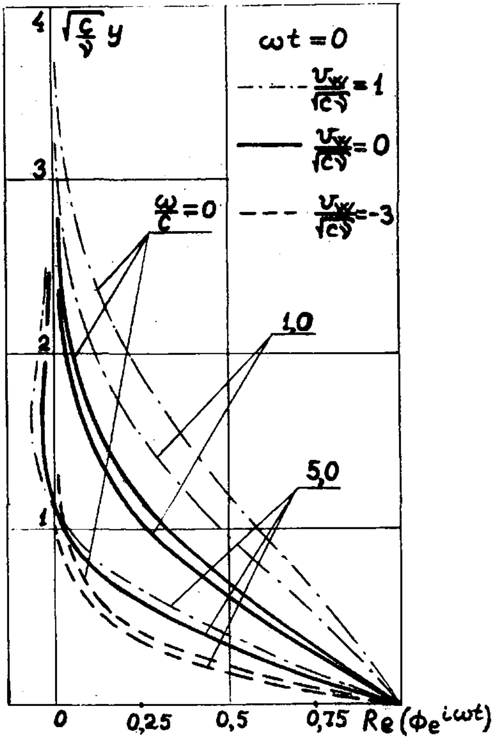

Рис.5. Влияние вдува (отсоса) на профиль нестационарной составляющей скорости при $\omega t = 0$

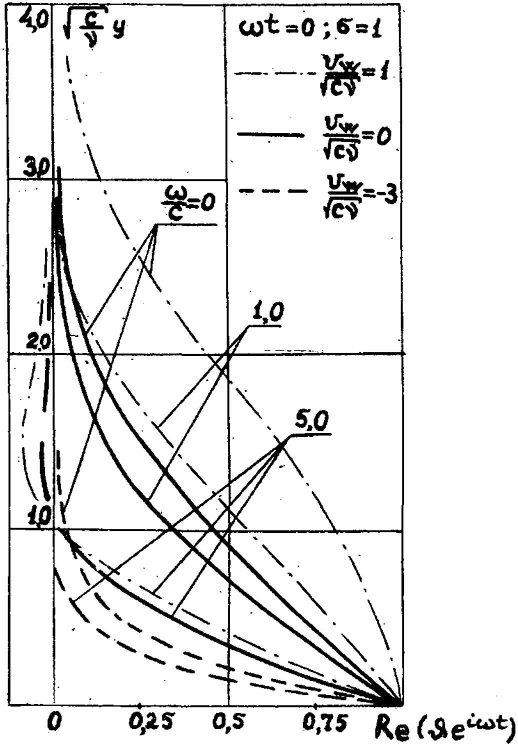

Рис.6. Влияние вдува (отсоса) на профиль нестационарной составляющей температуры при $\omega t = 0$

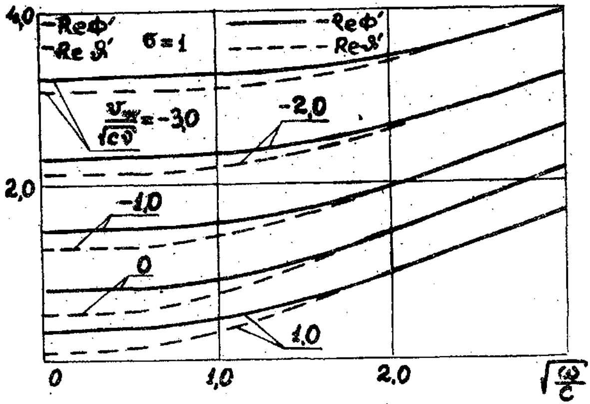

Рис. 7. Действительные части нестационарных составляющих напряжения трения и теплового потока на стенке

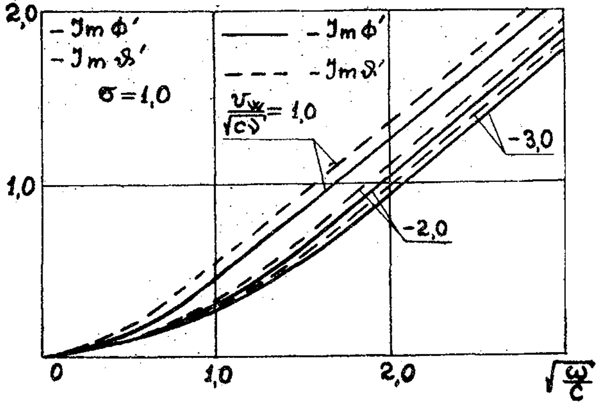

Рис. 8. Мнимые части нестационарных составляющих напряжения трения и теплового потока на стенке

ЛИТЕРАТУРА

I. Glauert M.B. The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. J. Fluid Mech, I, 1, 1956.

2. Rott N. Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. Quart. appl. math., vol XIII, 4, 1956.

3. Головин В.М., Файницкий Ю.Л. О нестационарном нагреве колеблющейся пластины. Труды Куйб. авиац. ин-та, вып. 35, 1971.

4. Wuest W. Grenzschichten an zylindrischen Körpern mit nichtstationärer Querbewegung. ZAMM, 32, 1952.

В.К. Скирмунт

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЛАЗИУСА С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов имеет некоторые преимущества по сравнению с другими приближенными методами. Важнейшими из них являются простота, универсальность алгоритма и единообразие вычислительной процедуры применительно к широкому классу линейных и нелинейных задач. Процесс интегрирования уравнений данным методом складывается из следующих основных этапов:

выбор ряда подходящего вида;

получение "невязки" дифференциального уравнения после замены искомого решения выбранным рядом;

минимизация "невязки", в результате которой формулируются условия для определения неизвестных параметров степенного ряда.

Простота и удобство оперирования степенными рядами чаще всего являются решающими факторами при рассмотрении вопроса о форме предполагаемого решения. Однако выбор этого ряда не может дать уверенности в справедливости полученного решения впредь до исследования его сходимости. Более того, радиус сходимости такого решения может оказаться недостаточным.

В работе [I] В.Г. Власовым предлагается ряд, основным достоинством которого является безусловная сходимость на конечном интервале изменения аргумента, что следует из способа его построения.