ЛИТЕРАТУРА

I. Glauert M.B. The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. J. Fluid Mech., I, 1, 1956.

2. Rott N. Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. Quart. appl. math., vol XIII, 4, 1956.

3. Головин В.М., Файницкий Ю.Л. О нестационарном нагреве колеблющейся пластины. Труды Куйб. авиац. ин-та, вып. 35, 1971.

4. Wuest W. Grenzschichten an zylindrischen Körpern mit nichtstationärer Querbewegung. ZAMM, 32, 1952.

В.К. Скирмунт

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЛАЗИУСА С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов имеет некоторые преимущества по сравнению с другими приближенными методами. Важнейшими из них являются простота, универсальность алгоритма и единообразие вычислительной процедуры применительно к широкому классу линейных и нелинейных задач. Процесс интегрирования уравнений данным методом складывается из следующих основных этапов:

выбор ряда подходящего вида;

получение "невязки" дифференциального уравнения после замены искомого решения выбранным рядом;

минимизация "невязки", в результате которой формулируются условия для определения неизвестных параметров степенного ряда.

Простота и удобство оперирования степенными рядами чаще всего являются решающими факторами при рассмотрении вопроса о форме предполагаемого решения. Однако выбор этого ряда не может дать уверенности в справедливости полученного решения впредь до исследования его сходимости. Более того, радиус сходимости такого решения может оказаться недостаточным.

В работе [I] В.Г. Власовым предлагается ряд, основным достоинством которого является безусловная сходимость на конечном интервале изменения аргумента, что следует из способа его построения.

Основной информацией для конструирования ряда служат значения функции и её последовательных производных в начальной и конечной точках исследуемого сегмента. Использование ряда В.Г. Власова в традиционной схеме решения дифференциальных уравнений, изложенной выше, и анализ этого процесса на практике являются темой настоящей статьи.

В качестве модели для исследования метода выбрана задача Блазиуса об обтекании плоской полубесконечной пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости. Задача формулируется дифференциальным уравнением

$$2\frac{d^3\varphi}{d\eta^3}+\varphi\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}=0 \qquad (I)$$

и краевыми условиями

$$\eta=0,\quad \varphi=0,\quad \frac{d\varphi}{d\eta}=0;\quad \eta\to\infty\quad \frac{d\varphi}{d\eta}\to 1. \qquad (2)$$

Производя в уравнении (I) замену $z=\eta/\delta$ ($\delta=const$), получим

$$2\frac{d^3\varphi}{dz^3}+\delta\varphi\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0. \qquad (3)$$

Выполняя последовательное дифференцирование (3), с учетом (2) найдем производные искомой функции при $z=0$ и $z=1$. Ограничимся производными до пятого порядка:

$$z=0:\quad \varphi=\varphi'=0,\quad \varphi''=\tau\delta^2,\quad \varphi'''=\varphi^{IV}=0;\quad \varphi^{V}=-\frac{1}{2}\tau^2\delta^5; \qquad (4)$$

$$z=1:\quad \varphi=f,\quad \varphi'=\delta,\quad \varphi''=\varphi'''=\varphi^{IV}=\varphi^{V}=0. \qquad (5)$$

Анализ (4) - (5) показывает, что имеются три параметра δ, τ, f, которые управляют начальными и конечными производными. Параметр δ необходимо рассматривать как правую границу области изменения аргумента, на которой выполняются условия (5). Параметр f представляет собой неизвестное значение функции тока φ на правой границе, т.е. при z =I. Параметр τ представляет собой напряжение трения при z =0.

Построим искомое решение в виде ряда В.Г. Власова [I] с точностью до производных третьего порядка:

$$\varphi\approx a_0+a_1 z+a_2 z(z-1)+a_3 z^2(z-1)+a_4 z^2(z-1)^2+a_5 z^3(z-1)^2, \qquad (6)$$

где коэффициенты a_i с учетом (4) - (5) имеют вид

$$a_0=0,\quad a_1=a_2=f,\quad a_3=\delta-2f,\quad a_4=\delta-3f+0{,}5\tau\delta^2,$$

$$a_5=6f-3\delta-0{,}5\tau\delta^2.$$

Подставляя (6) в уравнение (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых членах ряда (6), получим систему трех уравнений для нахождения значений параметров τ , δ , f :

$$0{,}5\,\delta^5\tau^2 - 8400f + 4200\,\delta + 840\,\tau\delta^2 = 0\,;$$
$$-7f + 3\delta + \tau\delta^2 = 0\,;$$
$$2\delta - \tau\delta^2 = 0\,.$$

Решая систему, получаем: $\delta = 2\sqrt{15}$, $\tau = 1/\sqrt{15}$, $f = 10\sqrt{15}/7$. Если проделать аналогичные выкладки с рядом, построенным с точностью до четвертых и пятых производных, то получим систему

$$0{,}5\,\delta^5\tau^2 + 15120f - 6720\,\delta - 2100\,\tau\delta^2 = 0\,;$$
$$-0{,}5\,\delta^5\tau^2 - 1680\,\delta + 840\,\tau\delta^2 = 0\,;$$
$$-0{,}5\,\delta^5\tau^2 + 23520f - 11760\,\delta - 2520\,\tau\delta^2 = 0$$

с решением $\delta = 15\sqrt{14}/8$, $\tau = 128\sqrt{14}/1575$, $f = 11\sqrt{14}/8$

и систему

$$-3\,\delta^5\tau^2 - 55440f + 25200\,\delta + 7560\,\tau\delta^2 = 0\,;$$
$$\delta^5\tau^2 + 2016\,\delta - 1008\,\tau\delta^2 = 0\,;$$
$$-\frac{13}{4}\,\delta^5\tau^2 - 498960f + 249480\,\delta + 55440\,\tau\delta^2 = 0$$

с решением $\delta = 9\sqrt{14}/5$, $\tau = 50\sqrt{14}/567$, $f = 369\sqrt{14}/275$.

Итак, в первом приближении

δ = 7,746, τ =0,2582, f = 5,532;

во втором –

δ = 7,0156, τ =0,304, f = 5,1447;

в третьем – δ = 6,732, τ =0,33009, f = 5,0184.

Решение задачи Блазиуса в первом, втором и третьем приближениях имеет вид

$$\varphi \approx 2\sqrt{15}\, z^2\left(1 - z^3 + z^4 - \frac{2}{7}\, z^5\right), \quad z = \frac{1}{2\sqrt{15}}\,\eta\,;$$

$$\varphi \approx 2\sqrt{14}\, z^2\left(1 - \frac{7}{8}\, z^3 + \frac{3}{2}\, z^5 - \frac{5}{4}\, z^6 + \frac{5}{16}\, z^7\right), \quad z = \frac{8}{15\sqrt{14}}\,\eta\,;$$

$$\varphi \approx 2\sqrt{14}\, z^2\left(1 - \frac{21}{25}\, z^3 + 3z^6 - \frac{9}{2}\, z^7 + \frac{63}{25}\, z^8 - \frac{28}{55}\, z^9\right), \quad z = \frac{5}{9\sqrt{14}}\,\eta\,. \quad (7)$$

Для профиля скоростей в третьем приближении получим

$$\varphi' \approx 2{,}2222\, z\left(1 - \frac{21}{10}\, z^3 + 12 z^6 - \frac{81}{4}\, z^7 + \frac{63}{5}\, z^8 - \frac{14}{5}\, z^9\right)\,. \quad (8)$$

Процесс уточнения решения можно продолжить. При этом всегда будет получаться система трех нелинейных алгебраических уравнений относительно τ , δ , f . Ограничимся третьим приближением и проанализируем его. В приводимой таблице сопоставлены значения функции тока и её производной, рассчитанные по формулам (7) - (8) и путем численного интегрирования [2] уравнения (I).

Сравнение результатов расчетов

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	φ По Хоуарту [2]	φ по формуле (7)	φ' по Хоуарту [2]	φ' по формуле (8)
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,4	0,02656	0,02639	0,13277	0,13192
0,8	0,10611	0,10544	0,26471	0,26304
1,2	0,23795	0,23645	0,39378	0,39135
1,6	0,42032	0,41774	0,51676	0,51381
2,0	0,65003	0,64624	0,62977	0,62679
2,4	0,92230	0,91744	0,72899	0,72678
2,8	1,23099	1,22555	0,81152	0,81097
3,2	1,56911	1,56389	0,87609	0,87782
3,6	1,92954	1,92549	0,92333	0,92734
4,0	2,30576	2,30366	0,95552	0,96109
4,4	2,69238	2,69262	0,97587	0,98181
4,8	3,08534	3,08782	0,98779	0,99293
5,2	3,48189	3,48614	0,99425	0,99789
5,6	3,88031	3,88571	0,99748	0,99959
6,0	4,27964	4,28564	0,99898	0,99996
6,4	4,67938	4,68564	0,99961	0,99999
6,8	5,07928	5,08564	0,99987	0,99999

Анализ результатов показывает, что уже в третьем приближении решение пригодно для практического использования.

ЛИТЕРАТУРА

I. Власов В.Г. Собрание трудов. Том 5. Судпромгиз, 1959.

2. *Howarth L., On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc. London, A164, 1938.*