

Приведенные выше результаты не отражают известного факта существования максимума скорости всплывания газового пузыря в поле постоянного ускорения и должны рассматриваться как приближенные. Более строгое исследование параметров траектории газового пузыря выходит за рамки поставленной автором задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усыкия С., Зигель Р. Кипение в условиях уменьшенной и нулевой гравитации. Невесомость. Физические явления и биологические эффекты. "Мир", 1964.
2. Лэмб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
3. Фортъе А. Механика суспензий. "Мир", 1971.
4. Маленков И.Г. О движении больших пузырей газа, всплывающих в жидкости, ПМТФ, № 6, 1968.

Г.В. Филиппов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

Будем искать управление P , дающее минимум функционалу

$$A = \int_0^{\tau_k} P d\tau, \quad (1)$$

если фазовые координаты v и z удовлетворяют уравнениям связи

$$\frac{dv}{dz} = P - v^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = v \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\tau = 0: v = 0, z = 1; \quad \tau = \tau_k: v \geq v_{k \min}, z = z_k$$

На управление наложено ограничение $0 \leq P \leq 1$. Исследуем достаточные условия оптимальности методом В.Ф. Кротова [1].

Для поставленной задачи функция R имеет вид

$$R = \varphi_v (P - v^2) + \varphi_z v - P + \varphi_\tau \longrightarrow \sup_{v, z, P} R$$

$\varphi_v, \varphi_z, \varphi_\tau$ - частные производные некоторой непрерывной и дифференцируемой функции $\varphi(v, z, \tau)$ соответственно по v, z и τ .

Пользуясь произволом функции ψ , зададим её так, чтобы функция R не зависела от управления ρ . В рассматриваемом случае целесообразно принять $\psi_v = -1$, $\psi_z = c$, $\psi_\tau = c_1$. Функция $R_1 = -v^2 + cv + c_1$ имеет единственный максимум при $v_* = c/2$. Следовательно, предполагаемая минимальность является дугой постоянной скорости $v = v_*$.

По условию задачи начальные и конечные точки не лежат на минимали. С другой стороны, участок $v = v_*$ обеспечивает супремум R .

На начальном и конечном участках траектории ρ может быть найдено с помощью принципа максимума, поскольку время выхода на особое управление и момент схода с него, а также соответствующие расстояния не фиксированы.

Для начального участка будем искать управление, обеспечивающее минимум функционалу (I) при наличии связи (2а) и граничных условиях

$$\tau = 0; v = 0; \tau = \tau_a; v = v_*$$

В последней задаче v_* полагается заданной, но для вариационной задачи в целом является параметром.

Составим гамильтониан

$$H = -\rho + \psi(\rho - v^2) \longrightarrow \sup_{\rho} H$$

Вспомогательное уравнение для функций ψ

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 2v\psi$$

после интегрирования даёт знакпостоянную, возрастающую по модулю функцию $\psi = \text{const exp}(2\int v d\tau)$.

Функция переключения есть $M = \psi - 1$. Из условия трансверсальности ($H \equiv 0$) следует $\psi = \rho / (\rho - v^2)$.

Функция ψ не может быть ни отрицательной, ни тождественно равной нулю, т.к. в этом случае $M \leq -1$, $\rho = 0$ и $dv/d\tau = -v^2 < 0$, что физически невозможно. Предположение $0 < \psi < 1$ вследствие $\rho = 0$ и $\psi = 0$ противоречит условию трансверсальности. Следовательно, первая дуга оптимального режима является дугой максимального управления $\rho = 1$. Аналогичный анализ схода с дуги особого управления показывает, что на заключительном этапе $\rho = 0$ при $v_* > v_k$ и $\rho = 1$, если $v_* < v_k$. Таким образом, структура оптимального управления полностью определена:

$$0 \div \tau_a; \rho = 1;$$

$$\tau_{a_1} \div \tau_{a_2} \quad \rho = \frac{c}{2} = v_k^2$$

$$\tau_{a_2} \div \tau_k : \rho = 0 \text{ (или } \rho = 1 \text{)}.$$

Уравнения связи интегрируются в конечном виде

$$v_* = th \tau_{a_1}; \quad z_{a_1} - 1 = \ln ch \tau_{a_1}; \quad z_{a_2} - z_{a_1} = (\tau_{a_2} - \tau_{a_1}) v_*;$$

$$z_k - z_{a_2} = \ln \frac{v_*}{v_k}, \quad \tau_k - \tau_{a_2} = \frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_*} \quad (3)$$

Функционал (I) при этом оказывается равным

$$A = \tau_{a_1} + \left(\tau_k - \tau_{a_1} + \frac{1}{th \tau_{a_1}} - \frac{1}{v_k} \right) th^2 \tau_{a_1} \quad (4)$$

Первое активное время определяется трансцендентным уравнением

$$z_k = \ln \frac{sh \tau_{a_1}}{v_k} + \left(\tau_k - \tau_{a_1} - \frac{1}{v_k} \right) th \tau_{a_1} + 2. \quad (5)$$

Если правый конец v закреплён, задача решается однозначно. Если на v_k наложить только ограничение снизу $v_k \geq v_{k, \min}$, то в силу $A = A(v_k)$ возможно существование v_{k0} , при котором

$A_{\min} = A(v_{k0})$. Задача определения v_{k0} сводится к отысканию экстремальных значений функции (4) при фиксированных τ_k и z_k . Приравняв производную $dA/d\tau_{a_1}$ нулю, с учётом значения $dv_k/d\tau_{a_1}$ определённого из (5) дифференцированием, получим

$$\frac{2v_k - th \tau_{a_1}}{v_k - th \tau_{a_1}} \left[1 + \left(\tau_k - \tau_{a_1} - \frac{1}{v_k} \right) th \tau_{a_1} \right] = 0. \quad (6)$$

Анализ (6) показывает, что

- а) случай $v_k = th \tau_{a_1}$ соответствует режиму ($\rho = 1 \rightarrow \rho = v_*^2$);
- б) $1 + \left(\tau_k - \tau_{a_1} - \frac{1}{v_k} \right) th \tau_{a_1} = 0$ — реализуется в режиме ($\rho = 1 \rightarrow \rho = 0$);
- с) вариант $2v_k - th \tau_{a_1} = 0$ устанавливает ещё одну связь v_k и τ_{a_1}

$$v_{k0} = \frac{1}{2} th \tau_{a_1} = \frac{1}{2} v_*$$

Подставляя (7) в (5), получим уравнение для определения τ_{a_1} , дающее экстремум A . Нетрудно убедиться, что случай "а" соответствует максимуму на линии разрыва, "б" — максимуму, "с" — минимуму функции A .

Таким образом, оптимальный режим управления для рассматриваемой

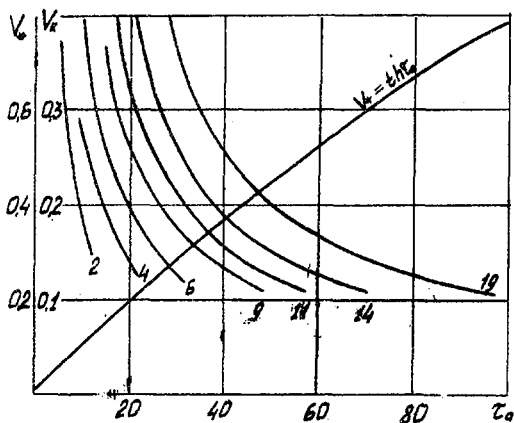


Рис. 1. Скорость при особом управлении и конечная скорость для оптимального режима

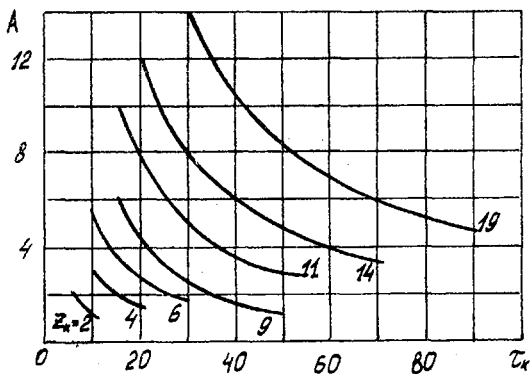


Рис. 2. Энергозатраты при оптимальном управлении

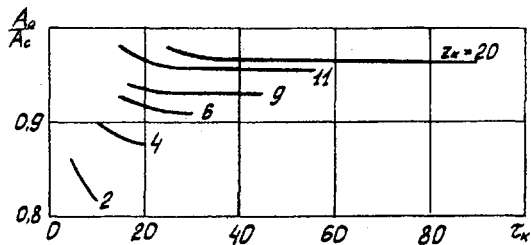


Рис. 3. Сравнение энергозатрат оптимального режима и режима постоянного управления

задачи состоит из трех дуг: первая угловая точка определяется уравнением (5), вторая - (3), минимальное значение функционала - (4) с учетом (7).

Величины U_* и U_{*0} для оптимального режима при различных значениях z_k и τ_k представлены графиком (рис.1). Там же для наглядности изображена гиперболическая тангенсоида $U_* = th \tau_{01}$. На рис.2 приведены значения $A_0 = A_0(z_k, \tau_k)$, а на рис.3 - отношение A_0 к значению A при $D = const$: $A_0/A_c = f(z_k, \tau_k)$. Как видно из последнего, оптимальное управление наиболее эффективно при малых z_k .

ЛИТЕРАТУРА

Кротов В.Ф., Букреев В.З., Турман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М., "Машиностроение", 1969.

Г.Д. Никитина, А.Г. Смирнов

ЗАТУХАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В U-ОБРАЗНОЙ ТРУБЕ С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Режим течения несжимаемой вязкой жидкости при свободных колебаниях в U-образных трубах определяется критериальным числом Валанси $Wa = \ell^2 \omega_0 / \nu$ [1,2], где ℓ - характерный линейный размер, $\omega_0 = \sqrt{2g/L}$ - собственная частота колебаний, g - ускорение силы тяжести, L - длина колеблющегося столба жидкости, ν - кинематическая вязкость. Число Валанси является аналогом числа Рейнольдса. При $Wa < 40$ течение ламинарное, при $Wa > 70$ - турбулентное. Диапазону чисел Валанси $40 < Wa < 70$ соответствует переходный режим течения. Параметры колеблющегося столба жидкости различны для этих режимов. Исследование затухания $A = z_n / z_{n+1}$, определяемого отношением предыдущей амплитуды колебаний z_n к последующей z_{n+1} , проведено для круглых стеклянных труб с гладкой внутренней поверхностью в широком диапазоне чисел Валанси [3].

Типичные зависимости затухания от амплитуды для труб с гладкой поверхностью приведены на рис.1.