

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения, ПММ, т.9, вып.4, 1945.
2. Христианович С.А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, т.20, вып.5, 1956.
3. Гриб А.А., Медведева Н.С. О затухании ударных волн в воде. Вестник Ленинградского гос. университета, № 19, 1964.
4. Коул Р. Подводные взрывы, М., ИЛ, 1950.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., "Мир", 1967.
6. Могилевич Л.И. Об асимптотическом методе решения нелинейных задач газовой динамики со слабыми ударными волнами. Некоторые вопросы теории коротких волн. "Математика", №12, 1972.

Г.В. Филиппов

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНО ВСПЛЫВАЮЩИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЕЙ

П р и н я т ы е о б о з н а ч е н и я

m_2 - масса газа в объёме пузыря; m_{np} - присоединенная масса; v - скорость всплытия; Q - сила лобового сопротивления; z - вертикальная координата; t - время; g - ускорение силы тяжести; r - радиус пузыря; ρ_2, ρ - массовая плотность газа и жидкости соответственно; ν - кинематический коэффициент вязкости.

В обычных земных условиях время стабилизации движения газового пузыря невелико. В опытах [1] установлено, что при кипении жидкости скорость центра массы парового пузыря к моменту отрыва его от горизонтальной поверхности нагрева, при перегрузке, составляющей 28,2% от земной, близка к скорости установившегося всплытия. Однако при некоторых условиях время стабилизации может оказаться существенным и пренебрежение инерционными свойствами приведет к заметной погрешности. Движение пузыря под дейст-

вием постоянной архимедовой силы F_a описывается системой

$$(m_2 + m_{np}) \frac{dv}{dt} = F_a - Q, \quad \frac{dz}{dt} = v. \quad (I)$$

Если не учитывать отклонений от сферической формы (в общем случае) и влияния вязкости, то присоединенная масса равна массе жидкости в половине объема пузыря [2]. Пренебрежем также составляющей лобового сопротивления, определяемой предисторией движения [3]. Тогда

$$C_x = \frac{2Q}{\pi \rho z^2 v^2} = \frac{\alpha}{Re^n}, \quad Re = \frac{vz}{\nu}.$$

При линейном законе сопротивления $\alpha = 8$, $n = 1$; в режиме пульсирующих сфероидов $\alpha = 11,55$, $n = 2/3$; при квадратичном законе сопротивления $\alpha = C_x$, $n = 0$ [4].

Приведем систему (I) к безразмерной форме

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = 1 - \bar{v}^{2-n}, \quad \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \alpha \bar{v} \quad (2)$$

Скорость $\bar{v} = v/v_0$ отнесена к скорости установившегося движения:

$$v_0 = \left[\frac{8}{3\alpha} \frac{z^{n+1}}{\nu^n} g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho}\right) \right]^{\frac{1}{2-n}},$$

линейная координата - к радиусу пузыря:

$$\bar{z} = \frac{z}{r}; \quad \alpha = \frac{v_0 t_0}{r}; \quad t_0 = \frac{0,5 + \rho_2/\rho}{1 - \rho_2/\rho} g^{\frac{n-1}{2-n}} \left[\frac{8}{3\alpha} \frac{z^{1+n}}{\nu^n} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho}\right) \right]^{\frac{1}{2-n}}.$$

Полагая в начальный момент пузырь покоящимся, интегрируем систему (2) для каждого из указанных выше режимов.

1. Режим линейного сопротивления ($n = 1$)

$$\tau = \ell n \frac{1}{1 - \bar{v}}; \quad \bar{z} = \alpha (\tau - 1 + e^\tau) = \alpha K_1(\tau).$$

2. Режим пульсирующих сфероидов ($n = 2/3$)

$$\tau = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \ell n \frac{1 + \bar{v}^{-1/3}}{1 - \bar{v}^{-1/3}} - \alpha z c t g \bar{v}^{-1/3} \right),$$

$$\bar{z} = \frac{3}{4} \left(\ell n \frac{1 + \bar{v}^{-2/3}}{1 - \bar{v}^{-2/3}} - 2 \bar{v}^{-2/3} \right) = \alpha K_2(\tau) \quad (3)$$

3. Режим квадратичного сопротивления ($n = 0$)

$$\tau = \frac{1}{2} \ell n \frac{1 + \bar{v}}{1 - \bar{v}}; \quad z = \alpha \left(\ell n \frac{\exp 2\tau + 1}{2} - \tau \right) = \alpha K_3(\tau). \quad (4)$$

формулы (3-4) применимы, если скорости установившегося движения значительно превышают скорости переходных режимов. Принимая за скорость стабилизации скорость, отличающуюся от скорости установившегося движения на 5%, рассчитаем по этим формулам длину участков стабилизации \bar{z}_{cm} и время стабилизации τ_{cm} (см. таблицу). Там же приведено отношение длины участка стабилизации к длине пути z_{ycm} проходимого с постоянной скоростью v_0 за время t_{cm}

$$z_{cm} / z_{ycm} = K / \tau_{cm}$$

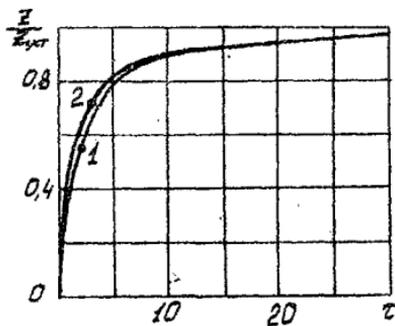
Функция K / τ_{cm} слабо зависит от n и с точностью до 4% можно принять, что $z_{cm} = 0,656 z_{ycm}$.

n	τ_{cm}	\bar{z}_{cm}	$\frac{z_{cm}}{z_{ycm}}$
0	1,83	1,156	0,632
2/3	2,50	1,65	0,656
I	3,00	2,04	0,680

Таким образом, пренебрежение инерционными свойствами газового пузыря на участке стабилизации приводит к ошибке более чем на 30%. Если $z < z_{cm}$, расхождение будет больше указанного, если $z > z_{cm}$ меньше.

Сказанное иллюстрировано графиком, где приведены функции z/z_{ycm} в широком диапазоне τ для режима Стокса (кривая I) и режима пульсирующих сфероидов (кривая 2). Видно, что пренебрежение участком стабилизации с точностью до 5% допустимо при $\tau > 20$. Точки соответствуют τ_{cm} .

Если скорость v_0 не сильно превышает скорость переходного режима, то каждый из реализуемых при движении режимов следует рассчитывать отдельно по формулам (3-5) при соответствующих граничных условиях. В качестве примера были рассчитаны параметры траектории воздушного пузыря в воде при перегрузке $n = 10^{-3}$. Оказалось, что для пузыря радиусом 2 см $t_{cm} = 4,57$ сек; $z_{cm} = 11$ см.



Изменение функции z/z_{ycm} во времени

Приведенные выше результаты не отражают известного факта существования максимума скорости всплывания газового пузыря в поле постоянного ускорения и должны рассматриваться как приближенные. Более строгое исследование параметров траектории газового пузыря выходит за рамки поставленной автором задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усыкия С., Зигель Р. Кипение в условиях уменьшенной и нулевой гравитации. Невесомость. Физические явления и биологические эффекты. "Мир", 1964.
2. Лэмб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
3. Фортъе А. Механика суспензий. "Мир", 1971.
4. Маленков И.Г. О движении больших пузырей газа, всплывающих в жидкости, ПМТФ, № 6, 1968.

Г.В. Филиппов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

Будем искать управление P , дающее минимум функционалу

$$A = \int_0^{\tau_k} P d\tau, \quad (1)$$

если фазовые координаты v и z удовлетворяют уравнениям связи

$$\frac{dv}{dz} = P - v^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = v \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\tau = 0: v = 0, z = 1; \quad \tau = \tau_k: v \geq v_{k \min}, z = z_k$$

На управление наложено ограничение $0 \leq P \leq 1$. Исследуем достаточные условия оптимальности методом В.Ф. Кротова [1].

Для поставленной задачи функция R имеет вид

$$R = \varphi_v (P - v^2) + \varphi_z v - P + \varphi_\tau \longrightarrow \sup_{v, z, P} R$$

$\varphi_v, \varphi_z, \varphi_\tau$ - частные производные некоторой непрерывной и дифференцируемой функции $\varphi(v, z, \tau)$ соответственно по v, z и τ .