В.И. Коробко, В.К. Шашмин

К ТЕОРИИ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Проинтегрированы в конечном виде уравнения, определяющие первые неавтомодельные члены в разложении скоростей в ряд по обратным степеням радиуса кривизны в задаче о развитии плоской ламинарной струи на пористой криволинейной поверхности при степенном задании изменения скорости отсоса или инжекции жидкости через пористую поверхность и в задаче о развитии осесимметричной ламинарной струи вдоль поверхности тела с осевой симметрией. Полученные решения позволяют учесть влияние кривизны поверхности тела на распределение скоростей и давления в струях и определить координаты точек отрыва струй от поверхности.

I. Распространение затопленной струи вдоль пористой криволинейной поверхности

Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости в плоском ламинарном пограничном слое, развивающемся на искривленной пористой поверхности, в цилиндрической системе координат [I] имеет вид (рис.I)

$$\left(1-\frac{y}{R}\right) u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y}\right); \qquad (I.I)$$

$$\frac{u^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{y}{R}\right)v\right] = 0.$$

Здесь x и u -продольная координата и составляющая скорости соответственно; y и v -нормальная координата и составляющая скорости; p -давление; ρ - -плотность жидкости; $R(x)$ - -соответствующий радиус кривизны поверхности. Кривизна поверхности в уравнениях (1.1) учитывается лишь в первом приближении.

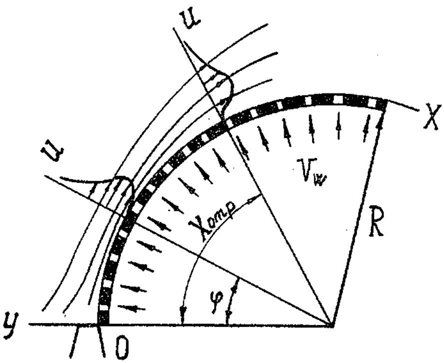

Рис.I. Схема течения струи вдоль пористой криволинейной поверхности

Граничные условия:

$$u=0\,,\quad v=v_w=\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa}\frac{v_0}{R} \qquad \text{при} \quad y=0\,,$$
$$u=0\,,\quad p=p_\infty \qquad \text{при} \quad y=\infty. \tag{I.2}$$

Для нормальной составляющей скорости на искривленной пористой по верхности принята степенная зависимость от координаты x , а d - ширина сопла. Считаем, что свойства подводимой или отводимой через поверхность жидкости те же, что и в струе.

Интегральное условие [I] :

$$\int_0^\infty\Big[u^2\int_0^y u\,dy-\frac{1}{R}\Big(\int_y^\infty u^2dy\Big)\Big(\int_0^y u\,dy\Big)\Big]dy-\frac{1}{R}\int_0^x\Big[\frac{\nu}{2}\int_0^\infty u^2dy+$$
$$+\int_0^\infty(v-v_w)\Big(\int_y^\infty u^2dy\Big)dy-\int_0^\infty uv\Big(\int_0^y u\,dy\Big)dy\Big]dx=E_0=const. \tag{I.3}$$

При выводе интегрального условия (I.3) использовано второе уравнение системы (I.I), которое при интегрировании поперек пограничного слоя дает

$$\frac{p_\infty-p}{\rho}=\frac{1}{R}\int_y^\infty u^2dy\,. \tag{I.4}$$

Введем функцию тока ψ , удовлетворяя уравнению неразрывности (I.I)

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\quad v=-\left(1-\frac{y}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{I.5}$$

Подставим (I.5) в первое уравнение системы (I.I) с учетом (I.4). Получим дифференциальное уравнение третьего порядка относительно ψ:

$$\left(1-\frac{y}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\left(1-\frac{y}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\left(1-\frac{y}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}=$$
$$=\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big[\int_y^\infty\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)^2dy\Big]+\nu\Big(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}+\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big). \tag{I.6}$$

Введем новые переменные

$$\xi=x\,;\quad \eta=y\,(\nu x)^{-3/4}. \tag{I.7}$$

Уравнение (I.6) в новых переменных примет вид

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2+x\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\eta}-x\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-(\nu x)^{1/4}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}+\frac{1}{R}\Big[-\nu^{3/4}x^{7/4}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{3}{4}\eta(\nu x)^{3/4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{3}{4}(\nu x)^{3/4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_\eta^\infty\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2 d\eta\right]-\nu x\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-$$

$$-\nu^{3/4}x^{7/4}\eta\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\eta}+\nu^{3/4}x^{7/4}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\Big\}=0. \qquad (I.8)$$

Здесь и далее вместо ξ сохранено прежнее обозначение x. Решение уравнения (I.8) ищем в виде ряда по обратным степеням радиуса кривизны:

$$\psi(x,\eta)=(\nu x)^{1/4}\left\{f_0(\eta)+\left[f_1(\eta)-\left(\frac{x}{d}\right)^{æ+1}\frac{v_0}{\nu x(æ+1)}\right]\frac{(\nu x)^{3/4}}{R}+\cdots\right\} \qquad (I.9)$$

Здесь $f_0(\eta)$ – автомодельное решение задачи о развитии струи вдоль плоскости [2].

Подставим выражение (I.9) в уравнение (I.8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях R. Получим систему дифференциальных уравнений:

$$f_0'''+\frac{1}{4}f_0f_0''+\frac{1}{2}f_0'^2=0\ ;$$

$$f_1'''+\frac{1}{4}f_0f_1''+\frac{1}{4}f_0'f_1'+f_0''f_1=\left(\frac{1}{2}f_0'^2+\frac{1}{4}f_0f_0''\right)\eta+ \qquad (I.10)$$

$$+\frac{1}{4}\int_\eta^\infty f_0'^2d\eta-\frac{1}{4}f_0f_0'-f_0''\left[1+\left(\frac{x}{d}\right)^{æ}\frac{v_0}{\nu}\right];$$

. . . .

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по η. Запишем граничные условия (I.2) с учетом (I.5) и (I.9):

$$f_0(0)=f_1(0)=f_0'(0)=f_1'(0)=0;\quad f_0'(\infty)=f_1'(\infty)=0. \qquad (I.11)$$

Интегральное условие (I.3) для функций $f_0(\eta)$ и $f_1(\eta)$ согласно формулам (I.5), (I.7) и (I.9) примет вид

$$\int_0^\infty f_0f_0'^2d\eta=E_0\ ;$$

$$\int_0^\infty \left\{ 2 f_0 f_0' f_1' + f_0'^2 \left[f_1 - \left(\frac{x}{d}\right)^{\text{æ}} \frac{v_0}{\nu} \right] \right\} d\eta = \int_0^\infty \left[\left(\frac{2}{3} f_0 + \eta f_0' \right) \int_\eta^\infty f_0'^2 d\eta \right] d\eta +$$
$$+ \int_0^\infty \left[\frac{2}{3} f_0'^2 + f_0 f_0' \left(\frac{1}{3} f_0 - \eta f_0' \right) \right] d\eta + \left(\frac{x}{d}\right)^{\text{æ}} \frac{v_0}{\nu} \int_0^\infty f_0'^2 d\eta . \tag{I.12}$$

Решение первого уравнения (I.I0) с соответствующими граничными (I.II) и интегральными (I.I2) условиями изложено в работе [2]. Это решение можно представить в параметрической форме, работа [3] :

$$f_0 = \alpha z^2, \quad f_0' = \frac{\alpha^2}{6} z (1 - z^3), \quad \alpha = \sqrt[4]{40 E_0},$$
$$\eta = \frac{12}{\alpha} \int_0^z \frac{dz}{1 - z^3} = \frac{2}{\alpha} \left[\ln \frac{1 + z + z^2}{(1 - z)^2} + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{3}}{z + 2} \right]. \tag{I.13}$$

Второе уравнение системы (I.I0) с учетом первого преобразуется в

$$f_1''' + \frac{1}{4} f_0 f_1'' + \frac{1}{4} f_0' f_1' + f_0'' f_1 = \left(\frac{1}{2} f_0'^2 + \frac{1}{4} f_0 f_0'' \right) \eta - f_0'' \left(\frac{x}{d}\right)^{\text{æ}} \frac{v_0}{\nu}. \tag{I.14}$$

Решение однородного уравнения, соответствующее (I.I4), изложено в работе [4]. Учитывая это, запишем общее решение уравнения (I.I4):

$$f_1(z) = z (1 - z^3) \int_0^z \frac{12}{z^2 (1 - z^3)^2} \left[C_1 F\left(\frac{1}{6} + i \frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{1}{3};\ z^3 \right) + \right.$$
$$\left. + C_2 z^2 F\left(\frac{5}{6} + i \frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{5}{6} - i \frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{5}{3};\ z^3 \right) \right] dz + C_3 z (1 - z^3) + \bar{f}_1(z) \tag{1.15}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, – постоянные интегрирования; $\bar{f}_1(z)$– частное решение уравнения (I.I4), а переменная z связана с переменной η формулой (I.I3). Частное решение уравнения (I.I4), удовлетворяющее граничным условиям (I.II), имеет вид

$$\bar{f}_1(z) = \frac{1}{7} \left[-\frac{3}{2} f_0' \eta + f_0 \eta + 6 - 7 \left(\frac{x}{d}\right)^{\text{æ}} \frac{v_0}{\nu} \right]. \tag{I.16}$$

Постоянные интегрирования определяются методом, изложенным в работе [3]

$$C_1 = \frac{1}{14} - \left(\frac{x}{d}\right)^{\text{æ}} \frac{v_0}{12\nu}, \quad C_2 = \frac{2 - B}{14 \bar{B}} + \left(\frac{x}{d}\right)^{\text{æ}} \frac{v_0 B}{12 \nu \bar{B}}, \quad C_3 = 0, \tag{I.17}$$

где

$$B = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + i \frac{\sqrt{47}}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{47}}{6}\right)}, \quad \bar{B} = -\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6} + i \frac{\sqrt{47}}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} - i \frac{\sqrt{47}}{6}\right)}. \tag{I.18}$$

Таким образом, с учетом формул (I.I5), (I.I6) и (I.I7) решение уравнения (I.I4) представляется в форме

$$f_1(z)=\frac{1}{7}\left[6+7\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa}\frac{v_0}{\nu}\right]+12z^2\int_0^z\frac{dz}{1-z^3}-36z(1-z^3)\left(\int_0^z\frac{dz}{1-z^3}\right)^2+$$

$$+\left[\frac{6}{7}-\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa}\frac{v_0}{\nu}\right]z(1-z^3)\int_0^z\frac{F\left(\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{47}}{6};\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{47}}{6};\frac{1}{3};z^3\right)}{z^2(1-z^3)^2}dz+ \quad (1.19)$$

$$+\left[\frac{6(2-B)}{7\bar{B}}+\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa}\frac{v_0}{\nu}\frac{B}{\bar{B}}\right]z(1-z^3)\int_0^z\frac{F\left(\frac{5}{6}+i\frac{\sqrt{47}}{6};\frac{5}{6}-i\frac{\sqrt{47}}{6};\frac{5}{3};z^3\right)}{(1-z^3)^2}dz.$$

Из первого уравнения системы (I.10) имеем

$$\int_\eta^\infty f_0'^2 d\eta=4f_0''(\eta)+f_0f_0'. \quad (\text{I.20})$$

Второе интегральное условие (I.12) с учетом (I.19) и (I.20) примет вид

$$\left(\frac{x}{d}\right)^{\varkappa}\frac{v_0}{\nu}\left[\frac{1}{54}-4f_0''(0)+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{36\Gamma\left(\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{47}}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{47}}{6}\right)}\right]= \quad (\text{I.21})$$
$$=\frac{B}{21}-\frac{5}{63}-\frac{40}{3}f_0''(0)+\frac{f_0^3(\infty)}{3}.$$

Подставляя значение $f_0''(0)$ и гамма - функций в интегральное условие, убеждаемся в его выполнении. При проверке были использованы таблицы из работы [5].

Согласно формулам (I.5), (I.9), (I.13) и (I.19) выведем уравнение осевой скорости:

$$u=(\nu x)^{-1/2}\left[f_0'(\eta)+\frac{(\nu x)^{3/4}}{R}f_0'(\eta)\right]. \quad (\text{I.22})$$

Полагаем, что ряд (I.22) для конечных коэффициентов будет сходящимся, причем возможно это при условии

$$\bar{\alpha}=\left|\frac{(\nu x)^{3/4}}{R}\right|<1.$$

Изменение осевой скорости по ширине струи представлено на рис. 2. Здесь принято $\bar{u}=(\nu x)^{1/2}u$ и $\gamma=(x/d)^{\varkappa}(v_0/\nu)$. Из рисунка видно, что при инжекции и при увеличении кривизны стенки профиль скорости вдоль нее приобретает отрывной характер и уже при $\bar{\alpha}=0{,}2$ обнаруживается слабый ток вблизи стенки. При инжекции жидкости $(\gamma>0)$

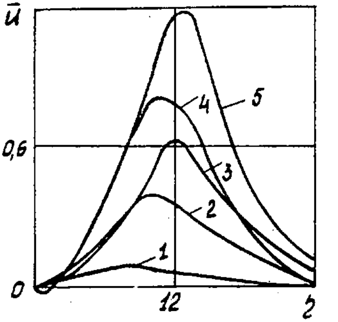

Рис.2. Изменение скорости по сечению плоской струи
I–$\bar\alpha$ =0 (I0 $\bar\alpha$); 2–$\bar\alpha$ =0,(γ=0);
3–$\bar\alpha$ =0 (γ =0,0I);
4–$\bar\alpha$ =0,2(γ=0); 5–α =0,2
(γ =0,0I)

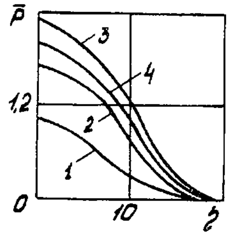

Рис.3. Изменение давления $\bar p$ по сечению струи η
I–$\bar\alpha$=0; 2–$\bar\alpha$ =0,0I (γ =0);
3–$\bar\alpha$ =0,02 (γ = 0);
4–$\bar\alpha$ 0,0I (γ =0,0I)

максимальное значение скорости отодвигается от поверхности, напряжение трения на ней уменьшается при увеличении кривизны и инжекции жидкости. Это следует из выражения

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu(\nu x)^{-5/4}\left[f_0''(0)+\bar\alpha f_1''(0)\right]$$

Из условия τ_w =0 найдем точку отрыва струи от поверхности:

$$x_{отр} = \frac{1}{\nu}\left[-R\frac{f_0''(0)}{f_1''(0)}\right]^{4/3}.$$

Подставим в это выражение значения $f_0''(0)$ и $f_1''(0)$ согласно формулам (1.13) и (1.19), получим

$$x_{отр} = \frac{1}{\nu}\left\{-R\Big/\left[\frac{6(2-B)}{7B}+\gamma\frac{B}{\bar B}\right]\right\}^{4/3}. \qquad (1.23)$$

Из выражения (1.23) следует, что координата точки отрыва зависит от свойств жидкости, от радиуса кривизны поверхности и скорости инжекции или отсоса жидкости через криволинейную стенку.

Распределение давления поперек струи, согласно (1.4) и (1.22), определяется формулой

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{1}{R(\nu x)^{1/4}}\int_\eta^{\infty}\left[f_0'^2(\eta)+2\bar\alpha f_0'(\eta)f_1'(\eta)\right]d\eta. \qquad (1.24)$$

Изменение давления поперек струи представлено на рис.3. Здесь принято $\bar p = 18(p_\infty - p)R(\nu x)^{1/4}/\rho$. Из рисунка видно очень сильное влияние кривизны стенки на изменение давления поперек струи. При инжекции жидкости давление в струе увеличивается по сравнению с давлением при той же кривизне и отсутствии инжекции.

2. Распространение затопленной струи вдоль поверхности тела с осевой симметрией

Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричном ламинарном пограничном слое, развивающемся на поверхности тела с осевой симметрией, в цилиндрической системе координат имеют вид [6]

$$\left(1-\frac{y}{R}\right) u \frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{u^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{y}{R}\right) a v\right] = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь x и y – координаты, параллельная и нормальная поверхности (рис.4); u, v – составляющие скорости вдоль оси x и y соответственно; $a(x)$ – радиус осесимметричного тела; $R(x)$ – соответствующий радиус кривизны поверхности вдоль оси x. Ширина струи считается малой по сравнению с $a(x)$. Кривизна R велика, так что $\frac{da}{dx} \sim \delta$. Кривизна поверхности в уравнениях (2.1) учитывается в первом приближении.

Граничные условия:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$u = 0, \quad p = p_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty. \qquad (2.2)$$

Интегральное условие получаем методом, аналогичным [1], оно имеет вид

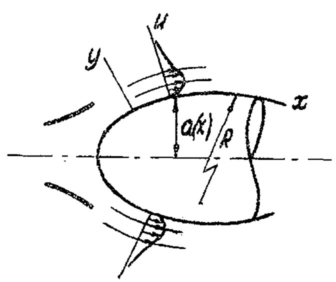

Рис.4. Схема течения струи вдоль тела с осевой симметрией

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty a u^2\left(\int_0^y a u dy\right)dy\right]-\frac{a}{R}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^\infty\left[\left(\int_0^y a u dy\right)\left(\int_y^\infty u^2 dy\right)\right]dy\right\}-$$

$$-\frac{\nu}{2R}\int_0^\infty a^2u^2dy-\frac{1}{R}\left[\int_0^\infty a v\left(\int_y^\infty a u^2 dy\right)dy-\int_0^\infty a u v\left(\int_0^y a u dy\right)dy\right]=0. \quad (2.3)$$

При выводе (2.3) использовано выражение (I.4).

Введем функцию тока ψ и новые переменные.

$$u=\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \xi=x,\quad \eta=y(\nu x)^{-3/4}. \quad (2.4)$$

Первое уравнение системы (2.I) в новых переменных примет вид

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2+x\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\eta}-x\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-a(\nu x)^{1/4}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}+\frac{1}{R}\left\{-\nu^{3/4}x^{7/4}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\right.$$

$$+\frac{3}{4}\eta(\nu x)^{3/4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2-\eta\nu^{3/4}x^{7/4}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\eta}+\eta\nu^{3/4}x^{7/4}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-$$

$$\left.-a\nu x\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\nu^{3/4}x^{7/4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_\eta^\infty\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2d\eta\right]+\frac{3}{4}(\nu x)^{3/4}\int_\eta^\infty\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2d\eta\right\}=0. \quad (2.5)$$

Здесь и далее вместо ξ сохранено прежнее обозначение x. Строим функцию тока $\psi(x,\eta)$ в виде разложения по обратным степеням радиуса кривизны:

$$\psi(x,\eta)=(\nu x)^{1/4}\left[f_0(\eta)+\frac{(\nu x)^{3/4}}{R}f_1(\eta)+\ldots\right]. \quad (2.6)$$

Подставим выражение (2.6) в уравнение (2.5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях R, получим систему дифференциальных уравнений:

$$af_0'''+\frac{1}{4}f_0f_0''+\frac{1}{2}f_0'^2=0;$$

$$(2.7)$$

$$af_1'''+\frac{1}{4}f_0f_1''+\frac{1}{4}f_0'f_1'+f_0''f_1=\left(\frac{1}{2}f_0'^2+\frac{1}{4}f_0f_0''\right)\eta-\frac{1}{4}f_0f_0'-af_0''+\frac{1}{4}\int_\eta^\infty f_0'^2d\eta.$$

. . . .

Введем новую переменную $\bar{\eta} = \eta / a$. Тогда система (2.7) запишется так:

$$f_0''' + \frac{1}{4} f_0 f_0'' + \frac{1}{2} f_0'^2 = 0 \quad ;$$

$$f_1''' + \frac{1}{4} f_0 f_1'' + \frac{1}{4} f_0' f_1' + f_0'' f_1 = a\left(\frac{1}{2} f_0'^2 + \frac{1}{4} f_0 f_0''\right)\eta - a f_0'' - \frac{a}{4} f_0 f_0' + \frac{a}{4} \int_\eta^\infty f_0'^2 d\eta \qquad (2.8)$$

. . . .

Здесь и далее вместо $\bar{\eta}$ сохраним прежнее обозначение η. Граничные условия для $f_0(\eta)$ и $f_1(\eta)$ из (2.2) с учетом (2.4) и (2.6) запишутся следующим образом:

$$f_0(0) = f_1(0) = f_0'(0) = f_1'(0) = f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = 0 . \qquad (2.9)$$

В интегральном условии (2.3) перейдем к функции тока ψ и новым переменным (2.4), используя формулу (2.6). Выписывая коэффициенты при одинаковых степенях R, имеем следующие интегральные условия для функций f_0 и f_1 :

$$\int_0^\infty f_0 f_0'^2 d\eta = a^2 E_0 \quad ;$$

$$\int_0^\infty (2 f_0 f_0' f_1' + f_0'^2 f_1)\, d\eta = a \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{2}{3} f_0 + \eta f_0'\right)\left(\int_\eta^\infty f_0'^2 d\eta\right) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \left[\frac{2}{3} f_0'^2 + f_0 f_0' \left(\frac{1}{3} f_0 - \eta f_0'\right)\right] d\eta \right\} . \qquad (2.10)$$

Первое уравнение системы (2.8) с соответствующими граничными (2.9) и интегральными (2.10) условиями совпадает с первым уравнением системы (1.10), граничными (1.11) и интегральными (1.12) условиями и имеет решение (1.13).

Второе уравнение (2.8) с учетом первого запишется как

$$f_1''' + \frac{1}{4} f_0 f_1'' + \frac{1}{4} f_0' f_1' + f_0'' f_1 = a\eta \left(\frac{1}{4} f_0 f_0'' + \frac{1}{2} f_0'^2\right) . \qquad (2.11)$$

Общее решение (2.II) имеет вид (I.I5). Частное решение уравнения (2.II) в переменной η , удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\bar{f}_1(\eta) = \frac{a}{7}\left(-\frac{3}{2}f_0'\eta^2 + \eta f_0 + 6\right). \tag{2.I2}$$

Постоянные интегрирования в решении уравнения (2.II) определяются аналогично, как в работе [3] :

$$C_1 = \frac{a}{14}, \quad C_2 = a\frac{2-B}{14\bar{B}}, \quad C_3 = 0, \tag{2.I3}$$

где B и $\bar{B}$ определены по формуле (I.I8).

Окончательно решение уравнения (2.II) запишется так:

$$f_1(z) = \frac{a}{7}\left[6 + 12z^2\int_0^z \frac{dz}{1-z^3} - 36z(1-z^3)\left(\int_0^z \frac{dz}{1-z^3}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{6a}{7}z(1-z^3)\int_0^z \frac{F\left(\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{1}{3};\ z^3\right)}{z^2(1-z^3)^2}dz +$$

$$+ \frac{6a(2-B)}{7\bar{B}}z(1-z^3)\int_0^z \frac{F\left(\frac{5}{6}+i\frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{5}{6}-i\frac{\sqrt{47}}{6};\ \frac{5}{3};\ z^3\right)}{(1-z^3)^2}dz \tag{2.14}$$

Выражение осевой скорости согласно (2.4) и (2.6) имеет вид

$$u = \frac{1}{a^2}(\nu x)^{-1/2}\left[f_0'(\eta) + \frac{(\nu x)^{3/4}}{R}f_1'(\eta)\right]. \tag{2.I5}$$

Изменение осевой скорости по ширине струи представлено на рис.5. Здесь принято $\bar{u} = ua^2(\nu x)^{1/2}$. Из рисунка следует, что при увеличении кривизны стенки профиль скорости вблизи неё приобретает отрывной характер и уже при $\frac{(\nu x)^{3/4}}{R} = 0{,}2$ обнаруживается слабый обратный ток.

Напряжение трения на поверхности определяем по формуле

$$\tau_w = \mu(\partial u/\partial y) = \mu a^{-3}(\nu x)^{-5/4}\left[f_0''(\eta) + \bar{\alpha} f_1''(\eta)\right].$$

Из условия $\tau_w = 0$ найдем координату точки отрыва струи от криволинейной поверхности

$$x_{отр} = \frac{1}{\nu}\left[-R\frac{f_0''(0)}{f_1''(0)}\right]^{4/3} \tag{2.I6}$$

Подставляя в (2.16) $f_0''(0)$ и $f_1''(0)$ согласно (1.13) и (2.14), получим

$$x_{отр} = \frac{1}{\nu}\left[-R\,\frac{7\bar{B}}{6(2-\bar{B})}\right]^{4/3} \quad (2.17)$$

откуда следует, что координата точки отрыва зависит от свойств жидкости и от радиуса кривизны поверхности. Распределение давления поперек струи согласно выражениям (1.4) и (2.15) имеет вид

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{1}{R(\nu x)^{1/4} a^3}\int_\eta^\infty \left[f_0'^2(\eta) + 2\bar{\alpha} f_0'(\eta) f_1'(\eta)\right] d\eta . \quad (2.18)$$

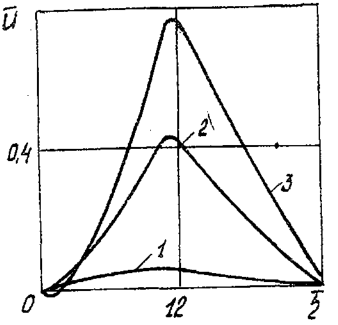

Рис.5. Изменение скорости $\bar{U}$ по сечению осесимметричной струи η 1 - $\bar{\alpha}$ =0 ($\cdot 10\,\bar{u}$); 2 - $\bar{\alpha}$ =0,1; 3 - $\bar{\alpha}$ =0,2.

Изменение давления α = 0,01 и 0,02 представлено на рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акатнов Н.И., Сюй Мянь-Фын. Плоская полуограниченная струя на криволинейной поверхности. ПМТФ, 1962, № 6.

2. Акатнов Н.И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Труды ЛПИ,1953, № 5.

3. Коробко В.И., Фалькович С.В. Развитие плоских ламинарных струй на пористой плоскости и криволинейной поверхности. Сб."Аэродинамика", вып.1, изд. СГУ,Саратов,1972.

4. Коробко В.И.,Фалькович С.В. Некоторые неавтоматические задачи теории струйных течений. Изв.АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.

5. Таблицы логарифмов гамма-функции в комплексной области. ВЦ АН СССР, М., 1966.

6. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. Изд. ЛГУ, 1970.