

5. Li T. *Hydrostatics in various gravitational fields.* *J. Chem. Phys.*, 1962, 36, №9.
6. Rosenthal D.K. *The shape and stability of a bubble at the axis of a rotating liquid.* *J. Fluid Mech.*, 1962, 12, №3.
7. Бенедикт Э. Общее поведение жидкости при полной или почти полной невесомости. Сб. "Невесомость. Физические явления и биологические эффекты". М., "Мир", 1964.

Л.И. Могилевич

О ЗАТУХАНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДЕ

Проблема распространения ударной волны в воде вдали от места ее возникновения рассматривалась рядом авторов как теоретически, так и экспериментально [1-4].

В настоящей работе методом сращиваемых асимптотических разложений [5,6] построено решение, описывающее течение вблизи фронта волны и вдали от него, найден закон затухания ударной волны, хорошо согласующийся с экспериментальными данными [3,4].

I. Рассмотрим распространение сферической ударной волны в воде на значительном расстоянии от места взрыва. При небольших давлениях (менее 500 кг/см²) на фронте волны сжатие предполагается адиабатическим и уравнение состояния воды запишем в форме [4]

$$\rho - \rho_0 = B \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^\eta - 1 \right]. \quad (I.1)$$

Здесь индекс 0 относится к параметрам невозмущенной среды, p - давление, ρ - плотность, $B = 3045$ кг/см², $\eta = 7,15$.

Уравнения движения для сферической волны имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) + \frac{2\rho u}{z} = 0. \quad (I.2)$$

где t - время; z - расстояние от центра симметрии; u - скорость частиц.

Скорость распространения звука (малых возмущений) равна

$$a = \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}} = a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{B\eta}{\rho_0}}. \quad (1.3)$$

Для относительно слабых ударных волн течение за фронтом волны можно считать безвихревым. Вводя потенциал скорости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = u$$

из уравнений (1.1)-(1.3) получим уравнение для φ

$$\left\{ a^2 - (n-1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2};$$

$$a^2 = a_0^2 - (n-1) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

На фронте ударной волны выполняются условия динамической совместности

$$\frac{p-p_0}{\rho B} = \frac{2}{n+1} \left[\left(\frac{U}{a_0} \right)^2 - 1 \right]; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{2}{n+1} \left(U - \frac{a_0^2}{U} \right); \quad \varphi = 0. \quad (1.5)$$

Здесь U - скорость ударной волны.

Пусть на некотором фиксированном расстоянии от центра взрыва известно изменение давления со временем (эпира давления)

$$\frac{p-p_0}{\rho B} = \varepsilon g(t) \quad \text{при } z = z_1, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.6)$$

Здесь ε - малый параметр, характеризующий порядок давления.

2. Перейдем к безразмерным зависимым и независимым переменным [6]

$$\varphi = a_0^2 t f(x, \tau); \quad \frac{p-p_0}{\rho B} = p; \quad a = a_0 a_*, \quad (2.1)$$

$$U = a_0 V, \quad z = a_0 t x; \quad t = \frac{z_0}{a_0 \tau}$$

Здесь z_0 - радиус заряда.

Уравнения (I.4) и граничные условия (I.5), (I.6) в переменных (2.I) примут вид

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2x\tau \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau} - \tau^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial f}{\partial x} = \\ = (\eta-1) \left[f - x \frac{\partial f}{\partial x} - \tau \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \\ - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tau} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{2}{\eta+1} (V^2-1), \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\rho}{V}, \quad f=0, \quad x-\tau \frac{dx}{d\tau} = V;$$

$$\rho = \varepsilon G(\tau), \quad \text{при } x = \ell\tau, \quad \ell = z_i/z_0.$$

3. Наличие малого параметра ε , характеризующего интенсивность ударной волны, позволяет искать решение в виде внешнего асимптотического разложения [5,6]

$$f(x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon f^{(1)}(x, \tau) + \varepsilon^2 f^{(2)}(x, \tau) + \dots$$

$$\rho(x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \rho^{(1)}(x, \tau) + \varepsilon^2 \rho^{(2)}(x, \tau) + \dots,$$

(3.I)

для первых членов которого получатся линейные уравнения акустической теории:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x^2} - 2x\tau \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x \partial \tau} - \tau^2 \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} = 0;$$

$$\rho^{(1)} = x \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + \tau \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \tau} - f^{(1)}.$$

(3.2)

Общее решение уравнений (3.2) для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x , представляется в форме

$$f^{(1)} = \frac{\tau^2}{x} H\left(\frac{1-x}{2\tau}\right), \quad p^{(1)} = -\frac{\tau}{x} H'\left(\frac{1-x}{2\tau}\right).$$

Здесь H - произвольная функция, штрих означает производную. Произвольная функция определяется из соответствия распределения давления вдали от фронта волны экспериментальной эпюре [4,3], тогда решение (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon p^{(1)} &= \varepsilon c \ell \tau^{5/2} x^{-1} (1-x)^{-3/2}; \\ \varepsilon f^{(1)} &= 2 \varepsilon c \ell \tau^{5/2} x^{-1} (1-x)^{-1/2}; \\ \varepsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} &= \varepsilon c \ell \tau^{5/2} [x^{-1} (1-x)^{-3/2} - 2x^{-2} (1-x)^{-1/2}]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $\varepsilon = 0,01$; $c = 2,836$.

Для вторых членов разложения (3.1) получим уравнение

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2} - 2x\tau \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x \partial \tau} - \tau^2 \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} = \\ = (n-1) \left(f^{(1)} - x \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} - \tau \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} \right) - \\ - 2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} \left(x \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x \partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно (3.4) для второго члена разложения (3.1) вблизи фронта акустической волны ($x = V = 1$) получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} \approx \varepsilon^2 \frac{n+1}{2} \frac{3}{2} c^2 \ell^2 \tau^5 \ell n \tau (1-x)^{-4}. \quad (3.5)$$

Из формул (3.3), (3.5) следует, что имеет место задача сингулярных возмущений [6]. Вблизи фронта волны $x = 1$ имеем

$$\varepsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} = \varepsilon^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} = O(\varepsilon^{2/5}) \text{ при } 1-x = O(\varepsilon^{2/5}).$$

4. Вблизи фронта волны вводим внутреннее разложение [5,6]

$$f = \frac{2}{n+1} \varepsilon^{4/5} F^{(1)}(\sigma, \tau) + \dots; \quad p = \frac{2}{n+1} \varepsilon^{2/5} \mu(\sigma, \tau) + \dots$$

$$x = 1 + \varepsilon^{2/5} \sigma, \quad \tau = \tau.$$

$F^{(1)}, \mu, \sigma, \tau$ - порядка единицы, для первого члена которого получим систему уравнений коротких волн [2,6]:

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \sigma} = \mu, \quad -\tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \sigma) \frac{\partial \mu}{\partial \sigma} + \mu = 0 \quad (4.1)$$

и условия на фронте ударной волны

$$\mu = 2 \left(\sigma - \tau \frac{d\sigma}{d\tau} \right); \quad \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \sigma} = \mu; \quad F^{(1)} = 0. \quad (4.2)$$

Система уравнений коротких волн (4.1), описывающая течение вблизи фронта ударной волны, имеет общее решение [2].

$$\sigma = \tau M \left(\frac{\mu}{\tau} \right) - \mu \ell n \tau \quad \text{или} \quad \mu = \tau N \left(\frac{\sigma + \mu \ell n \tau}{\tau} \right) \quad (4.3)$$

Здесь N - обратная функция произвольной функции M .

Из условия сраживания одночленных внешнего (3.3) и внутреннего (4.3) разложений определяется произвольная функция в решении (4.3), которое во внешних переменных примет вид

$$x - 1 = - \left(\frac{\varepsilon \ell n B}{\rho - \rho_0} \right)^{2/3} \tau^{5/3} + \frac{n+1}{2} \frac{\rho - \rho_0}{nB} \ell n \frac{1}{\tau}. \quad (4.4)$$

Решение (4.4) дает распределение давления вблизи фронта ударной волны, хорошо согласующееся с экспериментальной эюрой, [3,4], при $z_1/z_0 = \ell = 22$.

Условие сраживания двучленного внешнего разложения (3.3), (3.5) с одночленным внутренним разложением (4.4) удовлетворяется автоматически.

Подставляя (4.3) в виде (4.4) в первое соотношение (4.2), получим закон затухания фронта ударной волны

$$\rho - \rho_0 = nB\tau \left(\ell n \frac{1}{\tau} \right)^{-1/2} \left[D_1 - \frac{\delta}{n+1} (\varepsilon \ell)^{2/3} \left(\frac{\rho - \rho_0}{nB\tau} \right)^{1/3} \right]^{1/2}. \quad (4.5)$$

Постоянная интегрирования D_1 определяется из условия, что на фронте ударной волны при $z_1/z_0 = \ell = 22$ имеет место [4]

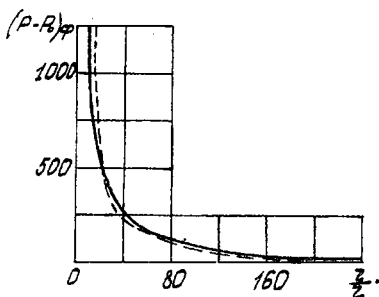


Рис.1. Распределение давления на расстоянии $z/z_0 = 60$

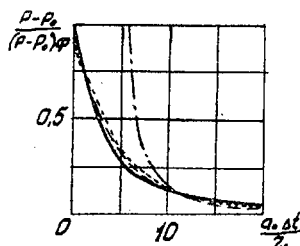


Рис.2. Зависимость давления на фронте ударной волны от расстояния

$(p - p_0)_\varphi = 500 \text{ кг/см}^2$, $\tau_\varphi = 0,05451$. Здесь $D_1 = 1,0383$, $B = 3045 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 7,15$, индекс φ относится к параметрам на фронте волны.

Формулы (3.3), (4.4), (4.5) позволяют построить распределение давления (скорости) за фронтом ударной волны для любого расстояния z/z_0 и в любой момент времени.

Результат расчета с помощью построенного решения находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [3,4] при $z/z_0 > 20$.

На рис.1 представлено распределение давления на расстоянии $z/z_0 = 60$: штриховая линия - по теории коротких волн (4.4), штрих - пунктирная - решение линейной теории (3.3), пунктирная - составное мультипликативное [5] разложение, сплошная - экспериментальные данные [3] ($(p - p_0)_\varphi = 144 \text{ кг/см}^2$).

На рис.2 приведены зависимости давления на фронте ударной волны от расстояния: штриховая линия - согласно данной теории, сплошная - экспериментальные данные [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения, ПММ, т.9, вып.4, 1945.
2. Христианович С.А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, т.20, вып.5, 1956.
3. Гриб А.А., Медведева Н.С. О затухании ударных волн в воде. Вестник Ленинградского гос. университета, № 19, 1964.
4. Коул Р. Подводные взрывы, М., ИЛ, 1950.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., "Мир", 1967.
6. Могилевич Л.И. Об асимптотическом методе решения нелинейных задач газовой динамики со слабыми ударными волнами. Некоторые вопросы теории коротких волн. "Математика", №12, 1972.

Г.В. Филиппов

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНО ВСПЛЫВАЮЩИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЕЙ

П р и н я т ы е о б о з н а ч е н и я

m_2 - масса газа в объёме пузыря; m_{np} - присоединенная масса; v - скорость всплытия; Q - сила лобового сопротивления; z - вертикальная координата; t - время; g - ускорение силы тяжести; r - радиус пузыря; ρ_2, ρ - массовая плотность газа и жидкости соответственно; ν - кинематический коэффициент вязкости.

В обычных земных условиях время стабилизации движения газового пузыря невелико. В опытах [1] установлено, что при кипении жидкости скорость центра массы парового пузыря к моменту отрыва его от горизонтальной поверхности нагрева, при перегрузке, составляющей 28,2% от земной, близка к скорости установившегося всплытия. Однако при некоторых условиях время стабилизации может оказаться существенным и пренебрежение инерционными свойствами приведет к заметной погрешности. Движение пузыря под дейст-