

2. Glazion C. Mouvement oscillatoire avec viscosite et inetie. Publ. Sc Tech du Ministere de l'Air, 1965, p.303-310.
3. Richardson, P.D Oscillations d'un liquide pesant et visqueux dans un tube en U de faible diametre. *J Roy. Aeron Soc.* 1988, 58, p.86-89.
4. Aubert - Huetz et Huet O, Oscillation du mercure dans un tube en U Influence de la capillarite. *C. R. Acad Sc. Paris*, 1967, 238, p 7-14.
5. Richardson. P.D. Oscillation du mercure dans un tube en U. Examen des resultats experimentaux. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 239, 1964, p.87-91.
6. Ury, J. F. Sur l'oscillations d'un liquide pesant et visqueux dans un tube en U. *Integr J. Mech. Sci.* 4, 1968, p.349-405.
7. К р а в ч е н к о А.Е., С м и р н о в А.Г. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в крутых U - образных трубах. - *Сб.: Физическая гидродинамика и кинетика жидкости*, вып. I, Ростов-Дон, 1968, с.3-11.

В.М.РУСАКОВ

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ СОСУДА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ

Прогресс развития биологических наук, определяемый высоким уровнем точных наук, позволяет решать вопросы, связанные с гидромеханикой кровообращения при сердечно-сосудистых заболеваниях - важнейшей проблеме современной медицины. Особое место в этой проблеме занимает атеросклероз. При изучении патогенеза атеросклероза рассматривались различные стороны заболевания, которые в основном имели описательный, констатирующий характер. К рассмотрению основных сторон патогенеза развития атеросклероза относится изучение течения крови в сосудах с выраженным атеросклерозом.

В работах [1], [2] изучаются вопросы течения крови в сосудах: механические модели стенок сосудов, реологические уравнения крови и т.д. Однако количественной оценки влияния различных отклонений формы со-

судов от нормальной на основные характеристики течения (расход и перепад давления) в них не содержится.

При возникновении различных отклонений формы сосуда от нормальной увеличивается его гидродинамическое сопротивление, что в свою очередь, приводит к снижению интенсивности кровоснабжения соответствующих органов или участков тела. Для поддержания нормальной интенсивности кровоснабжения необходимо увеличить давление в сосуде выше места нарушения формы.

Решим поставленную задачу при следующих упрощающих предположениях: течение стационарное, режим течения ламинарный, кровь ведет себя, как ньютоновская жидкость, стенки сосудов жесткие и цилиндрические.

Решение различных задач динамики кровообращения, как правило, выполнено в предположении о ламинарности течения [1] - [4].

Экспериментальные результаты показывают, что коэффициент сопротивления цилиндрической трубки при движении крови зависит от числа Рейнольдса так же, как для воды [4]. Поэтому можно считать, что кровь подчиняется ньютоновскому закону связи между напряжением трения и скоростью деформации.

Оставшиеся предположения о стационарности течения и пренебрежении влияния податливости стенок сосудов вводятся для упрощения задачи и требуют дальнейших исследований.

Рассмотрим осредненные за период пульсовой волны гидродинамические характеристики кровотока. Так как течение считается ламинарным, то для расчета гидродинамических характеристик системы кровообращения можно применить метод эквивалентных длин [5]. Под эквивалентной длиной сосудов системы кровообращения будем понимать длину цилиндрической трубки постоянного сечения, которая обладает таким же гидродинамическим сопротивлением, как и рассматриваемый участок системы кровообращения. Она определяется по формуле [5]

$$l = \frac{\pi q d^4 \Delta p}{128 \mu Q} = \frac{d^4 \Delta p}{32 \mu v}, \quad (I)$$

где l - эквивалентная длина сосудов системы кровообращения; d - диаметр сосуда; Δp - разность давлений между концами рассматриваемого участка системы кровообращения (например, между давлением на входе в сосуд со стенозом и давлением в капилляре); Q - объемный расход крови через пораженный сосуд; v - средняя скорость крови в этом сосуде; μ - динамическая вязкость крови. Обозначим индекс 0 все характеристики рассматриваемого участка системы кровообращения без патологии. Тогда эквивалентная длина сосудов системы кро-

воображения без поражения сосудов в этом случае из (I) равна

$$l_0 = \frac{\pi d^4 \Delta p_0}{128 \mu Q_0} = \frac{d^2 \Delta p_0}{32 \mu v_0} \quad (2)$$

Для того же участка системы кровообращения при патологических изменениях стенок сосудов характеристики будем обозначать индексом I. Тогда уравнение (I) устанавливает связь

$$l_1 = \frac{\pi d^4 \Delta p_1}{128 \mu Q_1} = \frac{d^2 \Delta p_1}{32 \mu v_1} \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) дадут соотношение, характеризующее отличную от нормы работу системы кровообращения

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{l_0}{l_1} \frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} \quad (4)$$

Из метода эквивалентных длин следует, что длина l_1 может быть выражена через l_0 и эквивалентную длину l_* патологических участков сосудов - "местных сопротивлений": атеросклеротических бляшек, увеличение степени извилистости (искривления) сосудов; появление местных расширений сосудов (эктазий) и т.д., которая равна длине прямой цилиндрической трубки, обладающей таким же сопротивлением, как и перечисленные "местные сопротивления". Таким образом

$$l_1 = l_0 + l_* \quad (5)$$

и формулы (4) и (5) приводят к соотношению

$$\bar{Q} = \bar{v} = \frac{K_p}{1 + l_*} \quad (6)$$

где введены следующие безразмерные величины

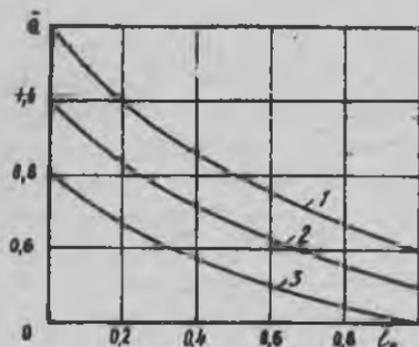
$$\bar{Q} = \frac{Q_1}{Q_0}, \quad \bar{v} = \frac{v_1}{v_0}, \quad l_* = \frac{l_*}{l_0}, \quad K_p = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_0}$$

Из (6) следует, что относительный расход $\bar{Q} = \bar{v}$ прямо пропорционален давлению на входе рассматриваемого участка системы кровообращения $K_p \Delta p_0$ и обратно пропорционален увеличению степени гидродинамического сопротивления этого участка. На рис. I приведены результаты расчетов по формуле (6). Из формулы (6) и рис. I видно, что если возникли какие-то дополнительные потери ($l_* > 0$), то количество крови, протекаемое по рассматриваемому участку, уменьшается. Для поддержания той же интенсивности кровоснабжения необходимо увеличить давление ($K_p > 1$). Следует сказать, что автору неизвестны работы по определению коэффициентов гидродинамического сопротивления (или эквивалентных им величин l_*) для перечисленных выше типов "местных сопротивлений" в сосудах. Однако, например, в справочнике [6] можно найти эти сведения для технических местных сопротивлений, которые можно рассматривать как модели биологических.

Для определения z_0 при образовании склеротических бляшек можно использовать работу [7], в которой дается приближенный метод расчета характеристик течения в цилиндрической трубе с симметричным образованием стеноза, описываемого уравнением

$$R = R_0 - \frac{d^2}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{z_0} \right) \quad |z| \leq z_0, \quad (7)$$

где R — текущий радиус стенки в месте стеноза для трубы радиуса $R_0 = d/2$; d — максимальная высота стеноза; $2z_0$ — длина стеноза (рис.2).

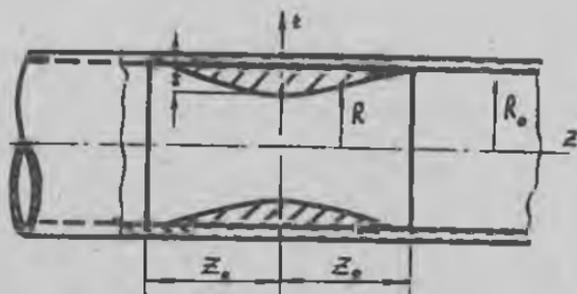


Р и с.1. Зависимость относительного расхода от безразмерной эквивалентной длины гидродинамического сопротивления

В действительности стеноз редко является осесимметричным. В первом приближении стеноз произвольной формы будем заменять на эквивалентный, длина которого равна $2z_0$, длине произвольного стеноза, максимальная высота d определяется из условия равенства площади поперечного сечения сосуда в самом узком месте, а форма — с отношением (7). Если \bar{S} — относительная величина степени стеноза в минимальном сечении к площади поперечного сечения нормального сосуда, то

из простых геометрических соображений следует, что

$$\bar{S} = \frac{d}{R_0} = 1 - \sqrt{1 - \bar{S}}. \quad (8)$$



Р и с.2. Схема образования стеноза

Градиент давления определяется формулой [7]

$$\frac{dp}{dz} = \frac{5432}{1575\pi^2} \frac{\rho Q^2}{R^5} \frac{dR}{dz} - \frac{\delta \mu Q}{\pi R^4} \quad (9)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет вклад сил инерции, а второй член уравнения - сил трения на стенках сосуда.

По определению эквивалентная длина местного сопротивления равна

$$\tilde{\ell}_* = \frac{\pi R_0^4 (\rho_+ - \rho_-)}{\delta \mu Q} \quad (10)$$

где ρ_+ , ρ_- - давление перед и после местного сопротивления.

Разность $(\rho_+ - \rho_-)$ можно найти после интегрирования уравнения (9) по z в пределах от $-z_0$ до z_0 . Интеграл от первого члена в этих пределах обращается в нуль, поэтому имеем

$$\rho_+ - \rho_- = \frac{\delta \mu Q}{\pi} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{R^4} \quad (11)$$

Подставляя в (11) формулу (7), получаем

$$\rho_+ - \rho_- = \frac{\delta \mu Q}{\pi R_0^4} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{\left[1 - \frac{\delta}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{2z_0}\right)\right]^4} \quad (12)$$

Заменяя переменную z на $\varphi = \frac{\pi z}{2z_0}$ и замечая, что подынтегральная функция симметрична относительно $z=0$, перепишем (12) как

$$\rho_+ - \rho_- = -\frac{16\mu Q z_0}{\pi^2 R_0^4} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left[1 - \frac{\delta}{2} (1 + \cos \varphi)\right]^4} \quad (13)$$

Так как $0 \leq \delta < 1$, то $1 - \frac{\delta}{2} > \left|\frac{\delta}{2}\right|$, поэтому [8]

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left[\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\delta}{2} \cos \varphi\right]^4} = \frac{\pi}{(1-\delta)^2} P_3\left(\frac{1-\delta/2}{\sqrt{1-\delta}}\right), \quad (14)$$

где $P_3(x)$ - полином Лежандра 1-го рода третьего порядка [9]

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x). \quad (15)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$\rho_+ - \rho_- = \frac{16\mu Q z_0}{\pi R_0^4} \frac{1}{(1-\delta)^2} P_3\left(\frac{1-\delta/2}{\sqrt{1-\delta}}\right). \quad (16)$$

Из (16) и (10) следует, что

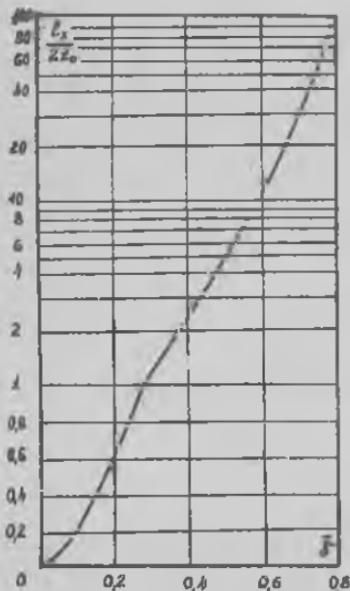
$$\tilde{\ell}_* = \frac{1}{(1-\delta)^2} P_3\left(\frac{1-\delta/2}{\sqrt{1-\delta}}\right) 2z_0. \quad (17)$$

Длина самого местного сопротивления равна $2z_0$, поэтому приращение эквивалентной длины примет вид:

$$\ell_* = \tilde{\ell}_* - 2z_0 = \left[\frac{1}{(1-\delta)^2} P_3\left(\frac{1-\delta/2}{\sqrt{1-\delta}}\right) - 1\right] 2z_0. \quad (18)$$

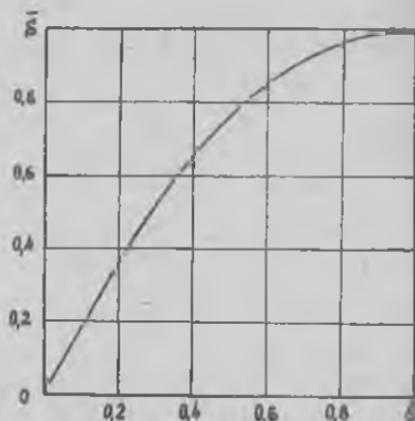
Таким образом задача решена. Опшем порядок расчета. По известным в норме величинам Δp_0 , Q_0 , μ , $d = 2R_0$ определяем величину ℓ_0 по формуле (2). По измерениям размеров склеротических бляшек δ и z_0 и формуле (18) рассчитываем ℓ_* . Далее с помощью формулы (4) или (6) или рис. I можно найти на сколько

уменьшится расход крови при том же значении давления ($\kappa_p = 1$), или на сколько увеличится давление при сохранении того же расхода ($\bar{Q} = 1$).



Р и с. 3. Влияние высоты стеноза на эквивалентную длину гидродинамического сопротивления

Для удобства расчетов на рис. 3 представлен график зависимости отношения $l_x / 2z_0$ от $\bar{\sigma}$, а на рис. 4 зависимость \bar{S} от $\bar{\sigma}$, рассчитанная по формуле (8).



Р и с. 4. Связь между высотой стеноза и сужением канала

Л и т е р а т у р а

1. Гидродинамика кровообращения. М., "Мир", 1971.
2. Павловский Ю.А., Регирер С.А.; Скобелева И.М. Гидродинамика крови. В сб.: Итоги науки. Гидромеханика. 1968, М., ВИНТИ, 1970, с. 7-96.
3. Cox R.H. Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis *J. Biomech.* 1969, 2, №3 p.251-265. Русский перевод: Кокс Р.Г. Сравнение моделей артериального движения крови, основанных на линеаризованных теориях распространения волн. В сб.: Гидродинамика кровообращения. М., "Мир", 1971, с. 43-60.

4. Регирер С.А. Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения. В сб.: Гидродинамика кровообращения. М., " Мир", 1971, с. 242-258.
 5. Некрасов Б.Б. Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. М., " Машиностроение", 1967.
 6. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М., " Машиностроение", 1975.
 7. Foggestog J. H Young D. F. Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease. - I. Theoretical development. *J. Biomech.*, 1970, 3, №3, p 297-305
 8. Градштейн И.С., Рнжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
 9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Функции, графики, таблицы. М., " Наука", 1964.
-
-