Если использовать формулу (6) вместо (3), то система уравнений (30) совпадет с полученной Ю.Д. Шевелевым [I]. В случае ортогональной системы координат уравнения (30) совпадают с приведенными в книге [3] . Подстановка выражения (I8) в (30) позволяет записать систему уравнений для физических составляющих вектора скорости.

Литература

I. Шевелев Ю.Д. Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. - В сб.: Новые применения метода сеток в газовой динамике, вып.I, МГУ, 1971, с. 100 - 195.

2. Thompson B.G.J. The prediction of boundary-layer behaviour and profile drag for infinite yawed wings. Part II. Flow near a turbulent attachment line. „Aeron. Res. Counc. Curr. Pap", 1974, N 1308.

3. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи, ЛГУ, 1970.

4. Сокольников И. Тензорный анализ. М., Физматгиз, 1971.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз, 1973.

6. Truesdell C. The physical components of vectors and tensors. ZAMM, 1953, 33, 10/11, p 345-356.

В.И.КОРОБКО

ВЕЕРНАЯ СТРУЯ НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ И ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

Постановка и автомодельное решение задачи о развитии затопленной веерной струи на пористой плоскости принадлежит М.С. Цуккеру [I].

1. Веерная струя на непроницаемой поверхности

Положим, что струя вязкой несжимаемой жидкости вытекает из радиально-щелевого сопла, ориентированного относительно оси Oz, и развивается на плоскости, по которой направлена ось Ox.
Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое при постоянном давлении во внешнем потоке имеют вид :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial(xu)}{\partial x}+\frac{\partial(xv)}{\partial y}=0 \qquad (\mathrm{I})$$

Граничные условия

$$u=v=0 \quad \text{при} \quad y=0, \qquad (2)$$

$$u\to 0 \quad \text{при} \quad y\to\infty.$$

Интегральное условие [I]

$$\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\,dy\right)dy=E=const. \qquad (3)$$

Определим функцию тока ψ

$$u=\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (4)$$

При этом, уравнения (I) сводятся к уравнению третьего порядка относительно ψ

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+x\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-x\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu x^2\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \qquad (5)$$

Используем новые независимые переменные

$$\xi=x, \quad \eta=y(\nu x)^{-5/4}. \qquad (6)$$

Уравнение (5) в новых переменных (6) примет вид

$$-\frac{9}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2+x\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial\eta}-x\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\nu^{-1/4}x^{3/4}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3} \qquad (7)$$

(здесь вместо ξ сохранено прежнее обозначение x).

Рассмотрим неавтомодельную задачу, т.е. примем, что струя формируется не точечным источником, а радиальной щелью конечного размера. Построим функцию тока ψ в виде ряда

$$\psi(x,\eta)=\nu^{-1/4}\left[f_0(\eta)x^{3/4}+f_1(\eta)x^{\lambda}+f_2(\eta)x^{\lambda_1}+\dots\right]. \qquad (8)$$

Первый член этого ряда является автомодельным решением задачи, λ и λ_1 - неизвестные показатели степеней. Подставляем разложение (8) в уравнение (7). Далее поступаем аналогично изложенному в работе [2] и получаем условия для показателей степеней

$$\lambda_1=2\lambda-\frac{3}{4}, \dots$$

и уравнения для функций $f_0, f_1, f_2, \dots$

$$4f_0''' + 3f_0 f_0'' + 6f_0'^2 = 0,$$

$$4f_1''' + 3f_0 f_1'' + (15-4\lambda) f_0' f_1' + 4\lambda f_0'' f_1 = 0,$$

$$4f_2''' + 3f_0 f_2'' + (15-4\lambda_1) f_0' f_2' + 4\lambda_1 f_0'' f_2 = (4\lambda - 9) f_1'^2 + 4\lambda f_1 f_1'' \qquad (9)$$

Граничные условия согласно (2) и (8) принимают вид

$$f_0(0) = f_1(0) = \dots = 0, \; f_0'(0) = f_1'(0) = \dots = 0, f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = \dots = 0 \qquad (10)$$

Интегральные условия получаются из (3).

$$\int_0^\infty f_0 f_0'^2 d\eta = E\nu^2, \quad \int_0^\infty (f_0'^2 f_1 + 2f_0 f_0' f_1')\, d\eta = 0, \qquad (11)$$

$$\int_0^\infty [f_2 f_0'^2 + 2f_0' f_1 f_1' + f_0(f_1'^2 + 2f_0' f_2')]\, d\eta = 0, \dots$$

Решение первого уравнения системы (9), полученное М.С. Цуккером [1], можно представить в параметрическом виде

$$f_0 = \alpha z^2, \; f_0' = \frac{\alpha^2}{2} z(1-z^3), \quad \eta = \frac{4}{\alpha} \int \frac{dz}{1-z^3},$$

$$f_0'' = \frac{\alpha^3}{8}(1-z^3)(1-4z^3), \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{40}{3} E\nu^2} \qquad (12)$$

(штрих обозначает производную по η ; α – постоянную интегрирования, которая определена из первого интегрального условия (11).

Рассмотрим второе уравнение системы (9). Определим значение λ при котором это уравнение имеет решение, удовлетворяющее граничным и интегральному условиям.

Заметим, что частным интегралом этого уравнения является

$$f_1 = f_0'.$$

Понизим порядок уравнения, воспользовавшись заменой

$$f_1 = f_0' \int \frac{y}{f_0'} d\eta. \qquad (13)$$

В результате подстановки (13) во второе уравнение (9), с учетом первого уравнения системы (9) получаем

$$y'' + \left(\frac{3}{4} f_0 + f_0''/f_0'\right) y' + \left[\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) f_0' - \frac{3}{4} f_0 f_0''/f_0' - f_0''^2/f_0'^2\right] y = 0.$$

Это уравнение в переменной z, согласно (12), примет вид

$$z^2(1-z^3) y'' + z(1-4z^3) y' + [-1 + (10-8\lambda) z^3] y = 0$$

(штрих обозначает дифференцирование по z).

В результате введения новой функции $w = zy(z)$ и перехода к переменной $t = z^3$, получаем гипергеометрическое уравнение

$$t(1-t)\frac{d^2w}{dt^2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}t\right)\frac{dw}{dt} + \frac{1}{9}(12-8\lambda)w = 0,$$

решение которого выражается через гипергеометрические функции

$$w = c_1 F\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{49-32\lambda},\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{49-32\lambda},\ \frac{1}{3},\ t\right) +$$
$$+ c_2 t^{1/3} F\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{49-32\lambda},\ \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{49-32\lambda},\ \frac{5}{3},\ t\right),$$

где c_1 и c_2 постоянные интегрирования.

Окончательно, общее решение второго уравнения (9) можно записать

$$f_1(z) = \frac{1}{\alpha} z(1-z^3)\int\frac{4}{z^2(1-z^3)^2}\left[c_1 F\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6},\ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6},\right.\right. \tag{14}$$
$$\left.\left.\frac{1}{3},\ z^3\right) + c_2 z^2 F\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6},\ \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6},\ \frac{5}{3},\ z^3\right)\right]dz + \frac{c_3\alpha^2}{2} z(1-z^3),$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные интегрирования.

Граничным условиям (10) удовлетворяет только лишь частный интеграл

$$f_1(z) = \frac{4c_2}{\alpha} z(1-z^3)\int\frac{1}{(1-z^3)^2} F\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6},\ \frac{5}{6} - \right. \tag{15}$$
$$\left. - \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6},\ \frac{5}{3},\ z^3\right) dz.$$

В случае выполнения равенства

$$\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{49-32\lambda}}{6} = -n \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{16}$$

гипергеометрическая функция может быть выражена через полином.

Выражение (15) для $f_1(z)$ является единственным ограниченным решением рассматриваемой задачи с числом собственных значений λ, удовлетворяющих, согласно условию (16), равенствам

$$\lambda = \frac{1}{32}\left[49 - (5+6n)^2\right],\quad n = 0,1,2, \tag{17}$$

Первым собственным значением λ, согласно (17), при котором функция $f_1(z)$ удовлетворяет граничным условиям, является $\lambda^* = -9/4$ ($n = 1$),

$$f_1 = \frac{4c_2}{\alpha} z(1-z^3)\int\frac{F(-1, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}, z^3)}{(1-z^3)^2}dz.$$

Воспользовавшись выражением гипергеометрической функции $F(-1, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}, z^3) = 1 - \frac{8}{5}z^3$ и возвратившись к переменной η, находим

$$f_1(\eta) = \gamma(-f_0 + 3f_0'\eta),$$

где $\gamma = \frac{4}{5}\cdot\frac{c_2}{\alpha^2}$ – постоянная интегрирования.

Легко увидеть, что второе интегральное условие (II) выполняется тождественно при любом значении постоянной интегрирования γ. Следовательно, γ является характерной постоянной задачи, зависящей от размеров источника струи, начального распределения скоростей и т.п. Методом, аналогичным [2], легко находится решение второго уравнения системы (9), удовлетворяющее граничным и интегральному условиям задачи

$$f_2(\eta) = \frac{3}{2}\gamma^2\left(3f_0'\eta^2 - 5f_0'\eta - f_0\right).$$

2. Веерная струя на пористой поверхности

Пусть веерная струя вытекает из радиальной щели и развивается на пористой поверхности, по которой направлена ось Ox. Считаем, что физические свойства подводимой (или отводимой) через поверхность жидкости те же, что и в струе. Уравнения движения и неразрывности в этом случае примут вид (I). Присоединим к этим уравнениям граничные условия

$$u = 0,\quad v = v_w = v_0 x^{\varkappa} \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{18}$$
$$u \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

т.е. полагаем, что на поверхности пористой плоскости продольная составляющая скорости равна нулю, поперечная составляющая скорости описывается степенной зависимостью от координаты x.

Интегральное условие получается аналогично условию в задаче о развитии плоской полуограниченной струи вдоль пористой пластины [3]

$$\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\,dy\right)dy - \int_0^x x\,v_w\left(\int_0^\infty xu^2 dy\right)dx = E = const. \tag{19}$$

Рассмотрим функцию тока ψ согласно (4) и приходим к дифференциальному уравнению (5) относительно ψ, которое в новых независимых переменных x и η, согласно формулам (6), имеет вид (7). Решение задачи ищем в виде

$$\psi = \nu^{1/4}\left\{f_0(\eta)x^{3/4} + \left[f_1(\eta) - \frac{1}{\varkappa+2}\right]q_0\, x^{\varkappa+2}\right\}, \tag{20}$$

где $q_0 = v_0\,\nu^{1/4}$ $(\varkappa \neq 2)$, а первый член разложения является автомодельным решением задачи о развитии веерной струи вдоль непроницаемой плоскости.

Подставляем выражение (20) в уравнение (7) и приравниваем члены при одинаковых степенях x.

Получаем систему уравнений для определения неизвестных функций f_0 и f_1

$$4f_0''' + 3f_0 f_0'' + f_0'^2 = 0,$$
$$4f_1''' + 3f_0 f_1'' + (7-4\varkappa) f_0' f_1' + (4\varkappa+8) f_0'' f_1 = 4f_0''. \qquad (2I)$$

Граничные условия согласно (I8) и (I9) принимают вид

$$f_0(0) = f_1(0) = 0, \quad f_0'(0) = f_1'(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = f_1'(\infty) = 0.$$

Интегральные условия получим из уравнения (I9)

$$\int_0^\infty f_0 f_0'^2 \, d\eta = E\nu^2, \qquad (22)$$
$$\int_0^\infty f_0' \left[f_0' \left(f_1 - \frac{1}{\varkappa + 5/4} \right) + 2 f_0 f_1' \right] d\eta = 0.$$

Заметим, что в случае $\varkappa = -5/4$ второй интеграл (22) расходится, а само условие теряет физический смысл. Из выражения (20) следует, что при $\varkappa = -5/4$ сумма (20) является автомодельным решением задачи о развитии веерной струи вдоль непроницаемой поверхности. Решение первого уравнения системы (2I) находим в (I2). Второе уравнение (2I) имеет частный интеграл

$$f_1 = \frac{1}{2+\varkappa}.$$

Однородное уравнение, соответствующее второму уравнению (2I), совпадает со вторым уравнением системы (9), если принять $\lambda = 2+\varkappa$, то решение этого уравнения примет вид (4)

$$f_{10g} = \frac{1}{\alpha} z(1-z^3) \int \frac{4}{z^2(1-z^3)^2} \Big[c_1 F\Big(\frac{1}{6} + \frac{i}{6}\sqrt{15+32\varkappa},\ \frac{1}{6} - \frac{i}{6}\sqrt{15+32\varkappa},\ \frac{1}{3},\ z^3\Big) + c_2 z^2 F\Big(\frac{5}{6} + \frac{i}{6}\sqrt{15+32\varkappa},\ \frac{5}{6} - \frac{i}{6}\sqrt{15+32\varkappa},\ \frac{5}{3},\ z^3\Big)\Big] dz + \frac{c_3\alpha^2}{2} z(1-z^3) \qquad (23)$$

Переменная z связана с η соответствующей формулой (I2), c_1, c_2 и c_3 – постоянные интегрирования. Окончательно, общее решение второго уравнения системы (2I) можно записать в виде

$$f_1 = \frac{1}{2+\varkappa} + f_{10g},$$

где f_{10g} определено согласно (23).

Постоянные интегрирования определяются методом, аналогичном изложенному в [4]

$$c_1 = \frac{1}{4(2+\varkappa)}, \quad c_2 = -c_1 \frac{B}{\bar{B}}, \quad c_3 = 0,$$

где

$$B = -\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) \Big/ \Gamma\Big(\frac{1}{6} + \frac{i}{6}\sqrt{15+32\varkappa}\Big) \Gamma\Big(\frac{1}{6} - \frac{i}{6}\sqrt{15+32\varkappa}\Big), \quad \bar{B} = -\Gamma\Big(\frac{5}{3}\Big) \Big/ \Gamma\Big(\frac{5}{6} + i\frac{\sqrt{15+32\varkappa}}{6}\Big) \Gamma\Big(\frac{5}{6} - i\frac{\sqrt{15+32\varkappa}}{6}\Big)$$

Решение второго интегрального условия (21) находится аналогично [4]. Координата точки отрыва струи от поверхности определяется из условия равенства нулю напряжения трения в этой точке

$$x_{отр} = \left[\frac{2+\varkappa}{q_0}\,\frac{\bar{B}}{B}\right]^{4/3} \qquad (24)$$

Из выражения (24) следует, что положение точки отрыва струи от поверхности зависит от свойств жидкости и скорости инжекции или отсоса жидкости.

Литература

1. Цуккер М.С. Ламинарная несжимаемая струя, бьющая из радиального диффузора вдоль стенок. ПММ, 18, №6, 1954.
2. Коробко В.И., Фалькович С.В. Некоторые неавтомодельные задачи теории струйных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 2, 1970.
3. Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. М., "Наука", 1965.
4. Коробко В.И., Фалькович С.В. Развитие плоских ламинарных струй на пористой плоскости и криволинейной поверхности. Межвуз. сб. Аэродинамика. Изд. СГУ, вып.1 (4), 1972.

В.Ф.СИВИРКИН

ТЕОРИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РАСЧЕТУ ЭЖЕКТОРНЫХ СОПЕЛ

Анализ работ, посвященных теоретическому исследованию сверхзвуковых турбулентных расчетных струй, показывает, что традиционные методы теории струй [1], [2] недостаточно полно учитывают влияние скоростной сжимаемости при больших числах Маха. В работах [3], [4] предлагается наряду с константой турбулентности ввести поправочный множитель, являющийся функцией соответствующим образом выбранного числа Маха. С этих позиций в [4] решена задача о начальном и основном участках сверхзвуковой расчетной струи. Между тем, как показано в работах [1], [2], [5], длина переходного участка сопоставима