линия) в сравнении с распределением по методу локальной линеаризации, совпадающим с [I] при $M>1$ (штриховая линия).

При докритическом обтекании проводилось численное интегрирование уравнения (II) по τ . Для профиля $F(x)=2x(1-x)$, τ =0,I при M_∞ = 0,75 в средней точке Ср = - 0,463 (по методу [I] Ср = - 0.487, отличие 5%). Для профиля $F(x)=0{,}6\cdot 6^{0,2}x(1-x^5)$, τ= 0,I при M_∞ =0,7 отличие между решением (II) и результатом по методу [I] достигает 4%.

Было отмечено, что решения, приведенные в данной работе, как и в работе [I] , переходят в решения линеаризированной теории тонкого профиля при $\tau\to 0$. При интегрировании уравнения (II) по τ от τ =0 до заданной толщины значительная часть пути интегрирования лежит (при М $\neq$ I) в области применимости линеаризированной теории, что приводит к умеренному расхождению в функциях $c_p(x)$, вычисленных по методу [I] и по предложенному способу. Указанное различие возрастает при $M_\infty\to 1$ как для $M<1$, так и для $M>1$. Автор глубоко благодарен С.В.Фальковичу за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

I. Rubbert P.E., Landahl M.T., „AIAA J." 1976,5,№3, p 470-479. Есть русск. пер. "Ракетная техника и космонавтика",1967, т.5, № 3, с. 104-117.

2. Давидёнко Д.Ф. Укр. матем. журнал, 1953, т.5, №2,с.196-206.

3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.

4. Spreiter J.R., Alksne A.Y. NACA Rep. 1359, 1958.

В.Г.ШАХОВ

УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В связи с созданием численных методов решения уравнений ламинарного пространственного пограничного слоя оказалось удобным пользоваться криволинейными системами координат, связанными с поверхностью тел произвольной формы [I] , что требует вывода соответствующих уравнений. Литература, посвященная этому вопросу, достаточно обширна.

Однако в работе [I] получена система уравнений пограничного слоя при малой толщине пограничного слоя по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Дальнейшее изучение свойств пространственного пограничного слоя показало, что существуют области течения, например, в окрестности передней критической линии скользящего крыла [2], где толщина пограничного слоя сравнима с радиусом кривизны обтекаемой поверхности. Для ортогональной системы координат в [3] приводятся уравнения ламинарного пространственного слоя, учитывающие это обстоятельство. Рассмотрим вывод такой системы уравнений для произвольной криволинейной системы координат, связанной с поверхностью тела.

Следуя [I], будем изучать движение жидкости или газа около тела, ограничённого произвольной гладкой поверхностью S, которая задана в прямоугольной системе координат $y^i (i = 1,2,3)$.

Выберем специальную систему координат x^1, x^2 на поверхности S. Тогда уравнение этой поверхности будет

$$y^z = Y^z(x^1, x^2) \qquad (z = 1,2,3).$$

Координаты любой точки P в пространстве x^i (i = I,2,3) можно представить в виде

$$y^z(x^1, x^2, x^3) = Y^z(x^1, x^2) + x^3 n^z(x^1, x^2), \tag{I}$$

где n^i – составляющие единичного вектора, нормального к поверхности и опущенного из точки P на поверхность S; x^3 – координата, отсчитываемая вдоль нормали к поверхности тела.

Координатные линии x^3 составляют семейство нормалей к поверхности S, а координатные поверхности $x^3 = const$ образуют семейство эквидистантных поверхностей относительно S.

Предполагаем, что между координатами y^i (i = I,2,3) и x^k (k = I,2,3) существует взаимно однозначное соответствие.

В дальнейшем латинские индексы пробегают значения (I,2,3), а греческие – (I,2); по паре одинаковых индексов производится суммирование (латинских – от I до 3, греческих – от I до 2).

Расстояние между точками в пространстве x^i определяется по формуле

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k,$$

где метрический тензор g_{ik} есть

$$g_{ik} = \frac{\partial y^z}{\partial x^i} \frac{\partial y^z}{\partial x^k}. \tag{2}$$

Ковариантные составляющие метрического тензора (2) координатной системы (I) записываются в виде [I]

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^z}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^z}{\partial x^\beta} = a_{\alpha\beta} - 2x^3 b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta};$$

$$g_{\alpha 3} = \frac{\partial y^z}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^z}{\partial x^3} = 0; \quad g_{33} = \frac{\partial y^z}{\partial x^3}\frac{\partial y^z}{\partial x^3} = 1. \tag{3}$$

Коэффициенты первой и второй основных квадратичных форм поверхности $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ определяются формулами :

$$a_{\alpha\beta} = Y_\alpha^z Y_\beta^z; \quad n_\alpha^z = b_\alpha^\sigma Y_\sigma^z; \quad b_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\sigma} b_\beta^\sigma;$$

$$Y_\alpha^z = \frac{\partial Y^z}{\partial x^\alpha}; \quad n_\alpha^z = \frac{\partial n^z}{\partial x^\alpha} \tag{4}$$

По теореме Менье нормальная кривизна $\varkappa_{(n)}$ поверхности в любом направлении равна [4]

$$\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda_\beta, \tag{5}$$

где $\lambda^\alpha = dY^\alpha/ds$; s – длина дуги (параметр дуги).

Из формул (3) и (5) следует, что, если толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом кривизны поверхности, то в пределах пограничного слоя можно пренебречь вторым и третьим членом в первом соотношении (3). Тогда вместо (3) можно пользоваться приближенными формулами

$$g_{\alpha\beta} \approx a_{\alpha\beta}(x^1, x^2), \quad g_{3\alpha} = g_{\alpha 3} = 0, \quad g_{33} = 1, \tag{6}$$

которые использовались Ю.Д. Шевелевым [I] при выводе уравнений пограничного слоя.

Контравариантные составляющие метрического тензора равны

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g},$$

где G^{ik} – соответствующие алгебраические дополнения $\|g_{ik}\|$; $g = det\|g_{ik}\|$. Следовательно ,

$$\|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \|g^{ik}\| = \begin{vmatrix} \frac{g_{22}}{g} & -\frac{g_{21}}{g} & 0 \\ -\frac{g_{12}}{g} & \frac{g_{11}}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Символы Кристоффеля, которые появляются в формулах ковариантной производной [4] , имеют вид [I] :

$$\Gamma^i_{jk} = G^\gamma_{\beta\alpha} \quad (i=\gamma=1,2;\ j=\beta=1,2;\ k=\alpha=1,2);$$

$$\Gamma^3_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^3};\quad \Gamma^\alpha_{3\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta 3} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^3}; \tag{8}$$

$$\Gamma^i_{33} = \Gamma^3_{3i} = \Gamma^3_{i3} = \Gamma^3_{33} = 0,$$

где $G^\gamma_{\beta\alpha}$ - символы Кристоффеля, которые возникают при ковариантном дифференцировании по поверхности

$$G^\gamma_{\beta\alpha} = \frac{g^{\sigma\gamma}}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right). \tag{9}$$

Уравнения неразрывности, количества движения и энергии в векторной форме [5] после пренебрежения массовыми силами и преобразования уравнения энергии принимают вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0;$$
$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = div\,\underline{P}; \tag{I0}$$
$$\rho\frac{d}{dt}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + div\left[(\underline{P} + p\varepsilon)\vec{v}\right] + \rho q,$$

где $\vec{v}$ - вектор скорости; $p,\ \rho,\ h = c_p T,\ T$ - соответственно давление, плотность, энтальпия и температура жидкости; t - время; $\underline{P}$ - тензор напряжений; ε - единичный тензор; q - поток тепла извне, обычно за счет теплопроводности; c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Для ньютоновской и фурьевской жидкости можно записать

$$P = 2\mu E - \left(p + \frac{2}{3}\mu\, div\,\vec{v}\right)\varepsilon;$$
$$\rho q = div(\lambda\, grad\, T) = div\left(\frac{\mu}{\sigma}\, grad\, h\right), \tag{II}$$

где E - тензор скоростей деформации; μ, k - вязкость и коэффициент теплопроводности жидкости; $\sigma = \mu c_p / k$ - число Прандтля.

По правилам тензорного анализа соотношения (I0) - (I7) в тензорной форме принимают вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v^j)_{,j} = 0;$$
$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_{,j}\right) = p^{ij}_{,j};$$

$$\rho\left(\frac{\partial H}{\partial t} + v^j \frac{\partial H}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\left(p^{ij} + q^{ij} p\right) v_i\right]_{,j} + \rho q ;$$

$$p^{ij} = -p q^{ij} - \frac{2}{3} \mu v^k_{,k} q^{ij} - 2\mu e^{ij} ; \qquad (12)$$

$$\rho q = \left(\frac{\mu}{\sigma} q^{ij} h_{,i}\right)_{,j} ; \quad H = h + \frac{v^2}{2} .$$

Тензор скоростей деформаций определяется как

$$e^{ij} = \frac{1}{2}\left(q^{ik} v^j_{,k} + q^{jk} v^i_{,k}\right) \qquad (13)$$

Контравариантная и ковариантная составляющие вектора скорости определяются формулами

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad v_i = q_{ik} v^k \qquad (14)$$

Запятая внизу означает ковариантное дифференцирование по соответствующей координате x^i. Система уравнений (12) – (14) замыкается уравнением состояния $p = \rho R T$.

В тензорной форме размерности контравариантных и ковариантных составляющих векторов и тензоров в общем случае могут не совпадать с физическими размерностями этих величин [6]. Используем обозначение $\dim F$ для размерности величины F [6].

По способу введения координат y^i можно записать, что

$$\dim y^i = \dim L , \qquad (15)$$

где L – характерный линейный физический размер тела.

Кроме того, имеем

$$\dim x^\alpha = \dim L_\alpha , \ \dim x^3 = \dim L , \qquad (16)$$

где L_α – масштаб измерения вдоль оси x^α.

Обычно возможны два случая

$$\dim L_\alpha = \dim L \ \text{или} \ \dim L_\alpha = 0 .$$

Из формул (3), (4), (7), (15) и (16) следует

$$\dim q_{\alpha\beta} = \frac{1}{\dim q^{\alpha\beta}} = \frac{(\dim L)^2}{\dim L_\alpha \dim L_\beta} ;$$

$$\dim q_{\alpha 3} = \dim q^{\alpha 3} = \dim q_{33} = \dim q^{33} = 0 . \qquad (17)$$

Так как физические составляющие вектора скорости u_i определяются по формуле [6]

$$u_i = \sqrt{g_{ii}}\, v^i \qquad \text{(не суммировать)}, \tag{18}$$

то

$$\dim v^\alpha = \frac{\dim L_\alpha}{\dim L} \dim U; \quad \dim v_\alpha = \frac{\dim L}{\dim L_\alpha} \dim U;$$
$$\dim v^3 = \dim v_3 = \dim U, \tag{19}$$

где U - характерная физическая скорость потока.

Теперь, используя обычные предположения теории пограничного слоя, можно все величины задачи представить в безразмерной форме (черта сверху)

$$v^\alpha = \frac{L_\alpha}{L} U \bar{v}^\alpha, \quad v_\alpha = \frac{L}{L_\alpha} U \bar{v}_\alpha, \quad v^3 = \frac{U}{\sqrt{R}} \bar{v}^3, \quad v_3 = \frac{U}{\sqrt{R}} \bar{v}_3,$$

$$H = H_\infty \bar{H}, \quad h = H_\infty \bar{h}, \quad p = \rho_\infty U^2 \bar{p}, \quad \rho = \rho_\infty \bar{\rho}, \quad \mu = \mu_\infty \bar{\mu}, \tag{20}$$

$$x^\alpha = L_\alpha \bar{x}^\alpha, \quad x^3 = \frac{L}{\sqrt{R}} \bar{x}^3, \quad t = \frac{L}{U} \bar{t}, \quad R = \frac{\rho_\infty U L}{\mu_\infty}$$

(индекс ∞ указывает на то, что величины определены по условиям в набегающем потоке).

Из выражений (8), (9), (17) и (20) получаем для ненулевых символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{L_\gamma}{L_\alpha L_\beta} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{3} = \frac{L}{L_\alpha L_\beta} \sqrt{R}\, \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{3};$$

$$\Gamma_{3\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta 3}^{\alpha} = \frac{L_\alpha}{L L_\beta} \sqrt{R}\, \bar{\Gamma}_{3\beta}^{\alpha};$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{\bar{g}^{\sigma\gamma}}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\sigma\alpha}}{\partial \bar{x}^\beta} + \frac{\partial \bar{g}_{\sigma\beta}}{\partial \bar{x}^\alpha} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\sigma} \right);$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^3}; \quad \bar{\Gamma}_{3\beta}^{\alpha} = \bar{\Gamma}_{\beta 3}^{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\gamma} \frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}^3}; \tag{21}$$

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = \frac{L^2}{L_\alpha L_\beta} g^{\alpha\beta}; \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{L_\alpha L_\beta}{L^2} g_{\alpha\beta}; \quad \bar{g}^{33} = \bar{g}_{33} = 1$$

Представляя (13) в виде

$$e^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[g^{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma_{\sigma\gamma}^{\beta}v^{\sigma}+\Gamma_{3\gamma}^{\beta}v^{3}\right)+g^{\beta\gamma}\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha}v^{\sigma}+\Gamma_{3\gamma}^{\alpha}v^{3}\right)\right];$$

$$e^{\alpha 3}=\frac{1}{2}\left[g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial v^{3}}{\partial x^{\beta}}+\Gamma_{\sigma\beta}^{3}v^{\sigma}\right)+\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{3}}+\Gamma_{\sigma 3}^{\alpha}v^{\sigma}\right];$$

$$e^{33}=\frac{\partial v^{3}}{\partial x^{3}}$$

и подставляя сюда формулы (20) и (21), имеем:

$$e^{\alpha\beta}=\frac{L_{\alpha}L_{\beta}}{L^{2}}\,\frac{U}{L}\bar{e}^{\alpha\beta},\quad e^{33}=\frac{U}{L}\bar{e}^{33},$$

$$e^{\alpha 3}=\frac{L_{\alpha}}{L}\,\frac{U}{L}\left(\sqrt{R}\,\bar{e}^{\alpha 3}_{(1)}+\frac{1}{\sqrt{R}}\,\bar{e}^{\alpha 3}_{(2)}\right),$$

$$\bar{e}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\bar{g}^{\alpha\gamma}\bar{v}^{\beta}{}_{;\gamma}+\bar{g}^{\beta\gamma}\bar{v}^{\alpha}{}_{;\gamma}\right),\ \bar{e}^{33}=\bar{v}^{3}{}_{;3}\,, \tag{22}$$

$$\bar{e}^{\alpha 3}_{(1)}=\frac{1}{2}\left(\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{\sigma\beta}^{3}\,\bar{v}^{\sigma}+\bar{v}^{\alpha}{}_{;3}\right),\quad \bar{e}^{\alpha 3}_{(2)}=\frac{1}{2}\,\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{v}^{3}}{\partial\bar{x}^{\beta}}$$

(точка с запятой означает ковариантное дифференцирование по соответствующей координате $\bar{x}^{i}$).

Запишем тензор напряжений в виде суммы

$$\begin{aligned}&p^{ij}=-pg^{ij}+\tau^{ij};\\&\tau^{ij}=\tau^{ij}_{(1)}+\tau^{ij}_{(2)};\\&\tau^{ij}_{(1)}=2\mu e^{ij},\quad \tau^{ij}_{(2)}=-\frac{2}{3}\mu\, v^{\kappa}_{;\kappa}\,g^{ij}.\end{aligned} \tag{23}$$

Тогда из (23) с учетом равенств (20) и (22) следует

$$\tau^{\alpha\beta}_{(1)} = \rho_\infty U^2 \frac{L_\alpha L_\beta}{L^2}\frac{1}{R}\bar{\tau}^{\alpha\beta}_{(1)}, \quad \tau^{33}_{(1)} = \rho_\infty U^2 \frac{1}{R}\bar{\tau}^{33}_{(1)},$$

$$\tau^{\alpha 3}_{(1)} = \rho_\infty U^2 \frac{L_\alpha}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\bar{\tau}^{\alpha 3}_{(11)} + \frac{1}{R^{3/2}}\bar{\tau}^{\alpha 3}_{(12)}\right),$$

$$\bar{\tau}^{\alpha\beta}_{(1)} = 2\bar{\mu}\bar{e}^{\alpha\beta}, \quad \bar{\tau}^{33}_{(1)} = 2\bar{\mu}\bar{e}^{33},$$

$$\bar{\tau}^{\alpha 3}_{(11)} = 2\bar{\mu}\bar{e}^{\alpha 3}_{(1)}, \quad \bar{\tau}^{\alpha 3}_{(12)} = 2\bar{\mu}\bar{e}^{\alpha 3}_{(2)} \tag{24}$$

Последнее соотношение (23) в координатной форме примет вид

$$\tau^{\alpha\beta}_{(2)} = -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\sigma} v^\gamma + \Gamma_{3\sigma}^{\sigma} v^3 + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\right) g^{\alpha\beta};$$

$$\tau^{\alpha 3}_{(2)} = 0 \quad \tau^{33}_{(2)} = -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\sigma} v^\gamma + \Gamma_{3\sigma}^{\sigma} v^3 + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\right).$$

Подставляя сюда значения (20) и (21), получим

$$\tau^{\alpha\beta}_{(2)} = \rho_\infty U^2 \frac{L_\alpha L_\beta}{L^2}\frac{1}{R}\tau^{\alpha\beta}_{(2)}, \quad \tau^{\alpha 3}_{(2)} = 0, \quad \tau^{33}_{(2)} = \rho_\infty U^2 \frac{1}{R}\bar{\tau}^{33}_{(2)},$$

$$\bar{\tau}^{\alpha\beta}_{(2)} = -\frac{2}{3}\bar{\mu}\bar{v}^{\kappa}{}_{;\kappa}\bar{g}^{\alpha\beta}, \quad \bar{\tau}^{\alpha 3}_{(2)} = 0, \quad \tau^{33}_{(2)} = -\frac{2}{3}\bar{\mu}\bar{v}^{\kappa}{}_{;\kappa}. \tag{25}$$

Используя формулы ковариантной производной [4], уравнение неразрывности из (12) можно записать как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} + G_{\beta\alpha}^{\alpha}\rho v^\beta + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x^3} + \Gamma_{3\alpha}^{\alpha}\rho v^3 = 0.$$

Подставляя в это уравнение соответствующие величины из (20) и (21) и сокращая на общий множитель $\rho_\infty U/L$, получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}^\alpha)}{\partial \bar{x}^\alpha} + \bar{G}_{\beta\alpha}^{\alpha}\rho\bar{v}^\beta + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}^3)}{\partial \bar{x}^3} + \bar{\Gamma}_{3\alpha}^{\alpha}\bar{\rho}\bar{v}^3 = 0$$

или

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\rho}\bar{v}^j)_{;j} = 0. \tag{26}$$

Уравнения количества движения из (12) в развернутой форме имеют вид

$$\rho\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^3 \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^3} + G_{\gamma\beta}^{\alpha} v^\gamma v^\beta + 2\Gamma_{3\sigma}^{\alpha} v^3 v^\sigma\right) =$$

$$= -g^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tau^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tau^{\alpha 3}}{\partial x^3} + G_{\beta\gamma}^{\alpha}\tau^{\beta\gamma} + G_{\gamma\beta}^{\beta}\tau^{\gamma\alpha} +$$

$$+ \Gamma_{3\beta}^{\beta}\tau^{3\alpha} + 2\Gamma_{3\beta}^{\alpha}\tau^{3\beta};$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^3}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^3}{\partial x^\alpha} + v^3\frac{\partial v^3}{\partial x^3} + \Gamma_{\alpha\beta}^{3} v^\alpha v^\beta\right) = -\frac{\partial p}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{\partial \tau^{\alpha 3}}{\partial x^\alpha} + G_{\alpha\beta}^{\beta}\tau^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial x^3} + \Gamma_{\alpha\beta}^{3}\tau^{\alpha\beta} + \Gamma_{3\beta}^{\beta}\tau^{33}.$$

Подставим сюда соотношения (20) – (25), перные два уравнения на общие множители $\rho_\infty U^2 L_\alpha / L^2$, а третье – на $\rho_\infty U^2\sqrt{R}/L$ и получим

$$\bar\rho\left(\frac{\partial \bar v^\alpha}{\partial t} + \bar v^j \bar v^\alpha_{;j}\right) = -\bar g^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x^\beta} + \frac{\partial \bar\tau^{\alpha 3}_{(11)}}{\partial \bar x^3} + \bar\Gamma_{3\beta}^{\beta}\bar\tau^{\alpha 3}_{(11)} + 2\bar\Gamma_{3\beta}^{\alpha}\bar\tau^{\beta 3}_{(11)} +$$

$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \bar\tau^{\alpha 3}_{(12)}}{\partial \bar x^3} + \bar\Gamma_{3\beta}^{\beta}\bar\tau^{\alpha 3}_{(12)} + 2\bar\Gamma_{3\beta}^{\alpha}\bar\tau^{\beta 3}_{(12)} + \frac{\partial \bar\tau^{\alpha\beta}}{\partial \bar x^\beta} + \bar G_{\beta\gamma}^{\alpha}\bar\tau^{\beta\gamma} + \bar G_{\gamma\beta}^{\beta}\bar\tau^{\gamma\alpha}\right);$$

$$\frac{1}{R}\bar\rho\left(\frac{\partial \bar v^3}{\partial \bar t} + \bar v^j\frac{\partial \bar v^3}{\partial \bar x^j}\right) + \bar\Gamma_{\alpha\beta}^{3}\bar\rho\,\bar v^\alpha \bar v^\beta = -\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x^3} +$$

$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \bar\tau^{\alpha 3}_{(11)}}{\partial \bar x^\alpha} + \bar G_{\alpha\beta}^{\beta}\bar\tau^{\alpha 3}_{(11)} + \frac{\partial \bar\tau^{33}}{\partial \bar x^3} + \bar\Gamma_{\alpha\beta}^{3}\bar\tau^{\alpha\beta} + \bar\Gamma_{3\beta}^{\beta}\bar\tau^{33}\right) + \tag{27}$$

$$+ \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \bar\tau^{\alpha 3}_{(12)}}{\partial \bar x^\alpha} + \bar G_{\alpha\beta}^{\beta}\tau^{\alpha 3}_{(12)}\right).$$

Уравнение энергии из (12) запишем в виде

$$\rho\left(\frac{\partial H}{\partial t}+v^{\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^{\alpha}}+v^{3}\frac{\partial H}{\partial x^{3}}\right)=-\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(\tau^{\alpha 3}v_{\alpha})}{\partial x^{3}}+\frac{\partial(\tau^{\alpha\beta}v_{\alpha})}{\partial x^{\beta}}+$$

$$+\frac{\partial(\tau^{33}v_{3})}{\partial x^{3}}+G_{\beta\alpha}^{\ \alpha}\tau^{\beta 3}v_{3}+\Gamma_{3\beta}^{\ \beta}\tau^{\alpha 3}v_{\alpha}+G_{\beta\alpha}^{\ \alpha}\tau^{\gamma\beta}v_{\gamma}+$$

$$+\Gamma_{3\alpha}^{\ \alpha}\tau^{33}v_{3}+\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial h}{\partial x^{3}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\mu}{\sigma}g^{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial x^{\beta}}\right)$$

После подстановки в него соотношений (20) - (25) и сокращения на общий множитель $\rho_\infty H_\infty U/L$ и замены

$$\frac{U^2}{H_\infty}=(k-1)M_\infty^2,$$

где $M_\infty=U/a_\infty$ – число Маха набегающего потока; $a_\infty=\sqrt{kRT_\infty}$ – скорость звука в набегающем потоке, получаем

$$\bar\rho\left(\frac{\partial\bar H}{\partial\bar t}+\bar v^{j}\frac{\partial\bar H}{\partial\bar x^{j}}\right)=(k-1)M_\infty^2\left\{-\frac{\partial\bar p}{\partial\bar t}+\frac{\partial(\bar\tau^{\alpha 3}_{(11)}\bar v_{\alpha})}{\partial\bar x^{3}}+\bar\Gamma_{3\beta}^{\ \beta}\bar\tau^{\alpha 3}_{(11)}\bar v_{\alpha}+\right.$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial(\bar\tau^{\alpha\beta}\bar v_{\alpha})}{\partial\bar x^{\beta}}+\frac{\partial(\bar\tau^{33}\bar v_{3})}{\partial\bar x^{3}}+\bar G_{\beta\alpha}^{\ \alpha}\bar\tau^{\beta 3}_{(11)}\bar v_{3}+\right.$$

$$\left.+\bar G_{\beta\alpha}^{\ \alpha}\bar\tau^{\gamma\beta}\bar v_{\gamma}+\bar\Gamma_{3\alpha}^{\ \alpha}\bar\tau^{33}\bar v_{3}+\frac{\partial(\bar\tau^{\alpha 3}_{(12)}\bar v_{\alpha})}{\partial\bar x^{3}}+\bar\Gamma_{3\beta}^{\ \beta}\bar\tau^{\alpha 3}_{(12)}\bar v_{3}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\bar G_{\beta\alpha}^{\ \alpha}\bar\tau^{\beta 3}_{(12)}\bar v_{3}\right\}+\frac{\partial}{\partial\bar x^{3}}\left(\frac{\bar\mu}{\sigma}\frac{\partial\bar h}{\partial\bar x^{3}}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\bar x^{\alpha}}\left(\frac{\bar\mu}{\sigma}\bar g^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar h}{\partial\bar x^{\beta}}\right). \tag{28}$$

Из уравнений (26) - (28) при $R\to\infty$ следует искомая система дифференциальных уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя в произвольной системе координат (черта сверху у безразмерных величин опущена)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho v^{j})_{;j}=0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial t}+v^{j}v^{\alpha}{}_{;j}\right)=-g^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial\tau^{\alpha 3}_{(11)}}{\partial x^{3}}+$$

$$+\Gamma_{3\beta}^{\beta}\tau^{3\alpha}_{(11)}+2\Gamma_{3\beta}^{\alpha}\tau^{3\beta}_{(11)};$$

$$\rho\Gamma_{\alpha\beta}^{3}v^{\alpha}v^{\beta}=-\frac{\partial p}{\partial x^{3}}; \tag{29}$$

$$\rho\left(\frac{\partial H}{\partial t}+v^{j}\frac{\partial H}{\partial x^{j}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial h}{\partial x^{3}}\right)+$$

$$+(k-1)M_{\infty}^{2}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(\tau^{\alpha 3}_{(11)}v_{\alpha})}{\partial x^{3}}+\Gamma_{3\alpha}^{\alpha}\tau^{\beta 3}_{(11)}v_{\beta}\right].$$

Второе и четвертое уравнение из (29) можно преобразовать, учитывая, что

$$\frac{\partial\tau^{\alpha 3}_{(11)}}{\partial x^{3}}+\Gamma_{3\beta}^{\beta}\tau^{3\alpha}_{(11)}+2\Gamma_{3\beta}^{\alpha}\tau^{3\beta}_{(11)}=\frac{g^{\alpha\sigma}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(\sqrt{g}\,g_{\beta\sigma}\tau^{3\beta}_{(11)}\right);$$

$$\frac{\partial(\tau^{\alpha 3}_{(11)}v_{\alpha})}{\partial x^{3}}+\Gamma_{3\beta}^{\beta}\tau^{\alpha 3}_{(11)}v_{\alpha}=\frac{1}{2}g^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(g_{\beta\gamma}\tau^{\alpha 3}_{(11)}v_{\alpha}\right)$$

После чего система (29) принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho v^{j})_{;j}=0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial t}+v^{j}v^{\alpha}_{;j}\right)=-g^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^{\beta}}+\frac{g^{\alpha\sigma}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(\sqrt{g}\,g_{\beta\sigma}\tau^{3\beta}_{(11)}\right);$$

$$\rho\Gamma_{\alpha\beta}^{3}v^{\alpha}v^{\beta}=-\frac{\partial p}{\partial x^{3}};$$

$$\rho\left(\frac{\partial H}{\partial t}+v^{j}\frac{\partial H}{\partial x^{j}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial h}{\partial x^{3}}\right)+$$

$$+(k-1)M_{\infty}^{2}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{3}}\left(g_{\beta\gamma}\tau^{\alpha 3}_{(11)}v_{\alpha}\right)\right] \tag{30}$$

Если использовать формулу (6) вместо (3), то система уравнений (30) совпадет с полученной Ю.Д. Шевелевым [I]. В случае ортогональной системы координат уравнения (30) совпадают с приведенными в книге [3] . Подстановка выражения (I8) в (30) позволяет записать систему уравнений для физических составляющих вектора скорости.

Литература

I. Шевелев Ю.Д. Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. - В сб.: Новые применения метода сеток в газовой динамике, вып.I, МГУ, 1971, с. 100 - 195.
2. Thompson B.G.J. The prediction of boundary-layer behaviour and profile drag for infinite yawed wings. Part II. Flow near a turbulent attachment line. „Aeron. Res. Counc. Curr. Pap.", 1974, N 1308.
3. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи, ЛГУ, 1970.
4. Сокольников И. Тензорный анализ. М., Физматгиз, 1971.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз, 1973.
6. Truesdell C. The physical components of vectors and tensors. ZAMM, 1953, 33, 10/11, p 345-356.

В.И.КОРОБКО

ВЕЕРНАЯ СТРУЯ НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ И ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

Постановка и автомодельное решение задачи о развитии затопленной веерной струи на пористой плоскости принадлежит М.С. Цуккеру [I].