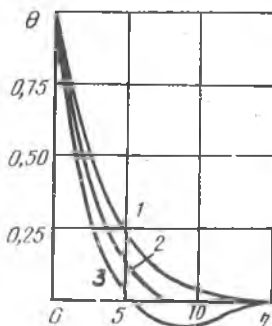
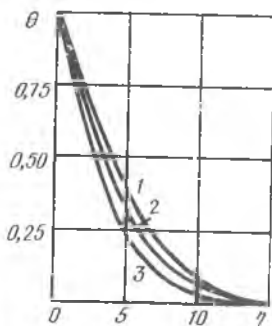


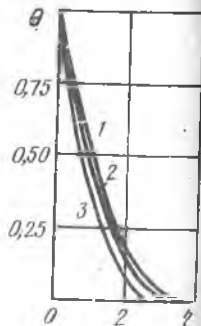
Корректность метода возмущений определяется параметрами разложения α_i и m . Расчеты показывают, что с ростом коэффи-



Р и с. 6. Профиль температуры для $\rho_r = 0,7$ и $a = -2$:
1 - $m = 0,1$; 2 - $m = 0,05$;
3 - $m = 0$



Р и с. 7. Профиль температуры для $\rho_r = 1,0$ и $a = 2$:
1 - $m = 0,2$; 2 - $m = 0,05$;
3 - $m = 0,1$



Р и с. 8. Профиль температуры для $\rho_r = 1,0$ и $a = -2$:
1 - $m = 0,1$; 2 - $m = 0,05$;
3 - $m = 0$

циентов разложения скорости спутного потока α_i уменьшается диапазон возможного изменения параметра m .

Л и т е р а т у р а

1. Л о й ц я н с к и й Л.Г. Механика жидкости и газа. М., "Наука" 1973.
2. А к а т н о в Н.И. Распространение плоской ламинарной струи вдоль твердой стенки. Труды ЛПИ, 1963, № 5, с.24-31.

УДК 532.517.4

В.И. К о р о б к о

ТУРБУЛЕНТНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СТРУЯ В СПУТНОМ ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

Уравнения турбулентного пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости в случае осесимметричного движения в безграничном однородном

потоке той же жидкости при отсутствии внешнего градиента давления и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$(u_0 + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + v \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\kappa}{x^{1/3}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u_1}{\partial z} \right); \quad (I)$$

$$\frac{\partial(zu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(zv)}{\partial z} = 0;$$

где u_0 , u_1 — осредненные во времени скорости жидкости в спутном потоке вне струи и избыточная продольная скорость в струе;

v — радиальная скорость;

x — продольное расстояние от среза сопла;

z — расстояние от оси струи.

Правая часть первого уравнения (I) записана согласно гипотезе изменения кинематической турбулентной вязкости ε , которая в рассматриваемом случае согласно [I] имеет вид $\varepsilon = \kappa x^{-1/3}$ (κ — коэффициент пропорциональности).

Граничные условия задачи

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (2)$$

$$u_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Интегральное условие (сохранение количества движения в струе)

$$2\pi \int_0^{\infty} (\rho u_1^2 + 2\rho u_1 u_0) z dz = K_0. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию тока ψ согласно уравнению неразрывности (I)

$$u_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v = -\frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

и перейдем к новым переменным

$$\xi = x, \quad \zeta = z/\kappa^{1/3} x^{1/3}. \quad (5)$$

Функцию тока $\psi(x, \zeta)$ ищем в виде ряда

$$\psi = \kappa [a_0(\zeta) + a_1(\zeta) x^{-2/3} + a_2(\zeta) x^{-4/3} + \dots]. \quad (6)$$

Здесь и далее вместо ξ сохранено прежнее обозначение x .

Продольная и радиальная составляющие скорости, согласно (4)

и (6), примут вид

$$u_1 = \frac{a_0'}{\zeta} x^{-2/3} + \frac{a_1'}{\zeta} x^{-4/3} + \frac{a_2'}{\zeta} x^{-6/3} + \dots ;$$

$$v = \frac{1}{3} k^{1/2} \left[a_0' x^{-4/3} + \left(a_1' + \frac{2a_1}{\zeta} \right) x^{-6/3} + \dots \right]. \quad (7)$$

Подставляя разложения (7) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем уравнения для определения неизвестных функций $a_0(\zeta)$, $a_1(\zeta)$, $a_2(\zeta)$:

$$\left(\frac{a_0'}{\zeta}\right)'' + \left(\frac{u_0}{3}\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{a_0'}{\zeta}\right)' + \frac{2}{3} u_0 \frac{a_0'}{\zeta} = 0;$$

$$\left(\frac{a_1'}{\zeta}\right)'' + \left(\frac{u_0}{3}\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{a_1'}{\zeta}\right)' + \frac{4}{3} \frac{a_1'}{\zeta} u_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{a_0'}{\zeta}\right)^2 = 0;$$

$$\left(\frac{a_2'}{\zeta}\right)'' + \left(\frac{u_0}{3}\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{a_2'}{\zeta}\right)' + 2u_0 \frac{a_2'}{\zeta} + 2 \frac{a_1' a_0'}{\zeta^2} - \frac{2}{3} \frac{a_1'}{\zeta} \left(\frac{a_0'}{\zeta}\right)' = 0.$$
(8)

Подставляя (7) в интегральное условие (3), имеем

$$\int_0^{\infty} 2u_0 a_0' d\zeta - K_0 / 2\pi\rho k; \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{a_0'^2}{\zeta} + 2u_0 a_1'\right) d\zeta = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \left(2 \frac{u_0' a_1'}{\zeta} + 2u_0 a_2'\right) d\zeta = 0.$$
(9)

Граничные условия, согласно (7) и (2), имеют вид

$$u_0(0) = a_1(0) = \dots = 0; \quad a_0'(0) = a_1'(0) = \dots = 0; \quad (10)$$

$a_0'(\infty), a_1'(\infty), \dots$ - ограничены.

Последнее условие (10) следует из второго уравнения (2). Первое уравнение (8) с соответствующими граничными (10) и интегральными (9) условиями проинтегрировано в [1]:

$$a_0(\zeta) = \frac{3\pi}{u_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{u_0}{6}\zeta^2\right) \right], \quad \zeta = \frac{K_0}{12\pi\rho k}, \quad (k_1 = 2x^2 m). \quad (11)$$

Второе уравнение (8) путем замены

$$z = \frac{u_0}{6}\zeta \quad \text{и} \quad \frac{a_0'}{\zeta} = \varphi \quad (12)$$

сводится к уравнению

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{z}\right) y' + \frac{2}{z} y = -\frac{\beta^2}{2u_0} \frac{1}{z} \exp(-2z). \quad (13)$$

Решение (13) проводится методом аналогичным изложенному в [2] с соответствующими граничными и интегральными условиями и результатом является

$$y = \frac{1}{4} \frac{\beta^2}{u_0} \exp(-z) (z-1) \left[2A + \operatorname{shi} z - \frac{\operatorname{chi} z}{z-1} \right], \quad (14)$$

где $\operatorname{shi} z = \int_0^z \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$; A - постоянная интегрирования, которая не определяется граничными и интегральными условиями и, аналогично задаче о развитии свободной турбулентной осесимметричной струи [3], может быть выражена через начальный секундный массовый расход жидкости. Ниже значение A определяется полумэмпирическим методом.

Согласно (12) и (14) решение второго уравнения (8) в переменной z имеет вид

$$a_1(z) = \frac{3}{4} \frac{\beta^2}{u_0^2} \left[-2Az \exp(-z) + \frac{1}{2} \exp(-2z) - z \operatorname{shi} z \exp(-z) - \frac{1}{2} \right].$$

Интегрирование третьего уравнения (8) с соответствующими граничными (10) и интегральными (9) условиями проводим также методом аналогичным изложенному в [2]. Приведем окончательный результат

$$\begin{aligned} a_2(z) = & \frac{3}{u_0} B (2z - z^2) \exp(-z) + \frac{3\beta^3}{16u_0^2} \left\{ (z-1) \operatorname{shi} z \exp(2z) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (z+1) [Ei(-z) - Ei(-3z)] + (z^2 - 2z) \exp(-z) \left[\int_0^z \operatorname{shi} z dz - \right. \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{Ei(-z)}{z} \exp(z) dz + \frac{1}{2} \int \frac{Ei(-3z)}{z} \exp(z) dz \left. \right] + (z-4) \exp(-z) - \\ & - \frac{1}{9} (z+2) \exp(-3z) + \frac{2}{9} (2z - z^2) Ei(2z) \exp(-z) + \frac{\ln 3}{2} + \\ & + \frac{38}{9} + \left(\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{2}{9} \right) [(2z - z^2) Ei(z) \exp(-z) + z] + \\ & + \frac{3}{8} A \frac{\beta^3}{u_0^2} \left[2(2z - z^2) \operatorname{shi} z \exp(-z) + (z-1) \exp(-2z) + z + 1 \right]. \end{aligned}$$

Здесь постоянная интегрирования B не определяется граничными и интегральными условиями и, аналогично задаче о развитии свободной осесимметричной струи [4], является дополнительной характеристической постоянной, зависящей от формы начального профиля скорости.

Сокращательно запишем выражение осевой скорости в осесимметричной турбулентной струе, развивающейся в спутном однородном потоке, в виде, удобном для практического пользования:

$$u = u_0 + \alpha B_1 \frac{1}{\bar{x}^{4/3}} + \alpha^2 \frac{1}{4u_0} (B_2 + AB_3) \frac{1}{\bar{x}^{4/3}} + \left(\frac{B}{d^2} B_4 + \frac{\alpha^3}{16u_0^2} B_5 - \frac{1}{8} A \frac{\alpha^3}{u_0^2} B_6 \right) \frac{1}{\bar{x}^2}, \quad (15)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\gamma}{d^{2/3}}; \quad \bar{x} = \frac{x}{d}; \quad B_1 = \exp(-z); \quad B_2 = B_1(z-1)(\text{sh}z - \frac{chz}{z-1});$$

$$B_3 = 2B_1(z-1); \quad B_4 = B_1(z^2 - 4z + 2);$$

$$B_5 = \left(\frac{ln3}{2} - \frac{2}{9} \right) [B_4 E_0(z) - z + 3] - (z-1) \text{sh}z \exp(-2z) -$$

$$B_4 \left\{ \int_0^z \frac{B_4}{z} \text{sh}z dz + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \frac{1}{z} \exp(z) [E_0(-3z) - E_0(-z)] dz \right\} -$$

$$- B_1(z-6) + \frac{1}{2}(z-3) [E_0(-3z) - E_0(-z)] + \frac{2}{9} B_4 E_0(-2z) +$$

$$+ \frac{z}{72} \exp(-3z);$$

$$B_6 = -2B_4 \text{sh}z + (z-1) \exp(-2z) + z - 3; \quad \text{sh}z = \int_0^z \frac{\text{sh}t}{t} dt;$$

$$E_0(z) = \int_{-\infty}^z \frac{\exp(t)}{t} dt; \quad E_0(-z) = \int_z^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt.$$

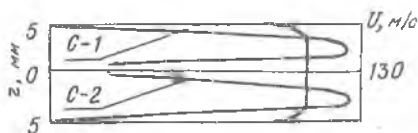
Таблица I

z	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0.0	1.000	-1.000	-2.000	2.000	6.376	-4.000
0.2	0.819	-0.966	-1.310	1.015	5.555	-3.743
0.4	0.670	-0.887	-0.804	0.375	5.084	-3.173
0.6	0.549	-0.785	-0.439	-0.022	4.308	-2.494
0.8	0.449	-0.693	-0.180	-0.252	3.508	-1.723
1.0	0.368	-0.568	0.000	-0.368	2.837	-1.222
1.2	0.301	-0.467	0.120	-0.410	2.238	-0.717
1.4	0.247	-0.376	0.197	-0.404	1.734	-0.313
1.6	0.202	-0.297	0.242	-0.371	1.317	-0.004
1.8	0.165	-0.228	0.264	-0.324	0.979	0.220
2.0	0.135	-0.171	0.271	-0.271	0.705	0.373
2.2	0.111	-0.123	0.266	-0.217	0.489	0.468
2.4	0.091	-0.083	0.254	-0.167	0.320	0.518
2.6	0.074	-0.051	0.238	-0.122	0.190	0.534
2.8	0.061	-0.026	0.219	-0.083	0.092	0.526
3.0	0.050	-0.006	0.199	-0.050	0.020	0.500
4.0	0.018	0.039	0.110	0.037	-0.110	0.282
5.0	0.007	0.042	0.054	0.047	-0.08	0.105

Значения функций b_i ($i=1,2,\dots,6$) были вычислены на ЭВМ М-220, результаты вычислений сведены в табл. I. Выражение поперечной составляющей скорости ввиду громоздкой записи не приводим.

В ходе эксперимента проводились исследования развития турбулентных осесимметричных струй в спутных однородных потоках. Исследовались две струи, которые истекали из сопла $d = 10,5$ мм с начальными распределениями скоростей, представленными на рис. I, и развивались в однородном спутном потоке, параллельном оси струи. Скорости спутных потоков устанавливались равными $u_0 = 10, 15, 19$ м/с. Спутный поток формировался в рабочей части аэродинамической трубы. Измерение скоростей в струях производилось по длине струй q шагом равным двум миллиграмм и по сечению - с шагом равным 2 мм. В качестве первичного прибора для измерения скоростей использовалась трубка Пито-Прайдтля, а качестве вторичного - микроанометр ММН-250.

Корпус цилиндрического сопла являлся причиной образования осесимметричного следа, который искажал однородный поток. Для определения действительных значений скоростей в струях, развивающихся в спутных потоках, были проведены измерения в следе за корпусом



Р и с. 1. Распределение осевых скоростей U м/с в выходном сечении сопла z мм

сопла при отсутствии активной струи в тех же сечениях, что и при наличии активной струи. Значения действительных скоростей определялись по формуле:

$$u = u_1 + (u_0 - u_2),$$

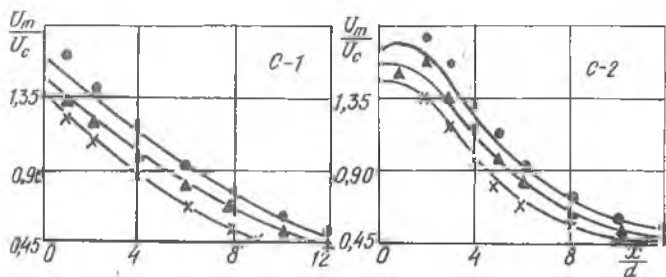
где u_2 — скорость в следе.

Характеристические постоянные γ , A и B были определены в результате сравнения экспериментальных значений скорости на оси струи с распределением (15) при $z = 0$. Значения постоянных γ , A и B для всех исследованных струй представлены в табл.2.

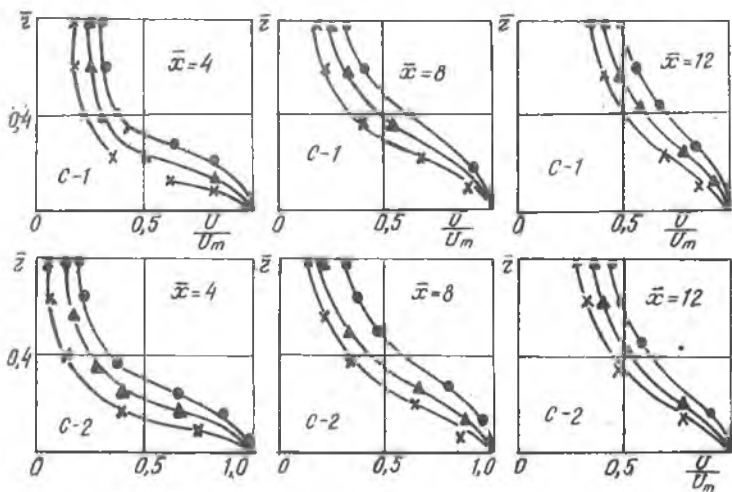
Т а б л и ц а 2

Тип струи	u_0 м/с	γ	$-A$	$-B$
С - I	10	1.475	27.620	0.945
	15	7.100	1.160	0.980
	19	10.200	0.457	-2.390
С - 2	10	8.250	0.790	0.0285
	15	6.250	1.880	2.180
	19	2.500	16.930	0.625

На рис. 2 сплошными линиями показаны результаты расчета изменения скорости на оси струи, вычисленные по формуле (15) при $z = 0$.



Р и с. 2. Изменение осевых скоростей $\frac{U_m}{U_c}$ вдоль струй:
 - x - $U_0 = 10$ м/с; - \blacktriangle - $U_0 = 15$ м/с; - \bullet - $U_0 = 19$ м/с



Р и с. 3. Изменение осевых скоростей $\frac{U}{U_m}$ по сечениям струй:
 - x - $U_0 = 10$ м/с; - \blacktriangle - $U_0 = 15$ м/с; - \bullet - $U_0 = 19$ м/с

Здесь же нанесены результаты измерений.

На рис. 3 показано изменение скорости по сечениям исследованных струй, полученное в результате расчета по формуле (15) (сплошная линия) и измерений (точки).

Л и т е р а т у р а

1. Бушмарин О.Н. Закрученная струя в спутном потоке жидкости той же плотности. Труды ЛПИ. Л., " Энергомашиностроение", 1955.
2. Коробко В.И. Развитие ламинарной закрученной струи в спутном потоке той же жидкости. В межвуз. сб.: Аэродинамика. Изд-во Саратовского ун-та, 1973, вып. 2(5).
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., " Наука", 1970.
4. Коробко В.И., Фалькович С.В. Развитие закрученной струи в безграничном пространстве. Изв. АН СССР, МЖТ, 1969, 3.

УДК 532. 517 (2+4)

В.Г. Шахов

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Очевидно, первым, кто дал критерий устойчивости ламинарного течения был О. Рейнольдс [1]. Этот критерий впоследствии получил название критического числа Рейнольдса. Недостаток его заключается в том, что он зависит от большого количества факторов, и поэтому его необходимо каждый раз определять (например, экспериментально) заново. Поэтому более универсальным методом определения устойчивости ламинарного течения является метод малых возмущений, который приводит к решению (определению собственных функций и значений) уравнения Орра-Зоммерфельда [1]. Наряду с другими недостатками он обладает большими вычислительными трудностями. Поэтому для разработки численных методов решения задач движения вязкой жидкости из-за сравнительно малой области переходного течения предлагаются различные упрощенные методы. Отметим здесь Х. Рауза [2], который в качестве критерия перехода