выполняются условия устойчивости для решения системы алгебраических уравнений (10) методом прогонки.

В заключение отметим, что в случае $p=2$ сеточное уравнение (II) с коэффициентами (I4) и (I5) использует девятиточечный пространственный шаблон, в то время как в [3] для той же погрешности аппроксимации используется двенадцатиточечный шаблон.

Литература

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, I971.
2. Фрязинов И.В. Экономичные схемы для уравнения теплопроводности с краевым условием III рода. ЖВМ и МФ, I2, № 3, 1972, с. 6I2-626.
3. Шевелёв Ю.Д. Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. В сб.: Новые применения метода сеток в газовой динамике, вып.I.М., МГУ, I97I, с. I00-I86.

Л.И.МОГИЛЕВИЧ

К ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СМРЕКЕРА

I. Рассмотрим плоскорадиальную фильтрацию сжимаемой жидкости в неизменном пористом пласте, истекающей из скважины радиуса R_c, со скоростью фильтрации v_c, обеспечивающей наличие зоны с нелинейным законом сопротивления Смрекера [I]:

$$Re = C\Omega^{2/3},\quad Re = \rho|v|k^{1/2}\mu^{-1},\quad \Omega = \rho k^{3/2}|grad\, p|\mu^{-2}, \tag{I}$$

где Re – число Рейнольдса; Ω – число фильтрации; C – безразмерный коэффициент; v – скорость фильтрации; p – давление; ρ – плотность жидкости; μ – коэффициент вязкости; k – проницаемость пласта.

Учитывая противоположное направление векторов скорости фильтрации и градиента давления из (I) получим

$$\rho v = -Ck^{1/2}\mu^{-1/3}\rho^{2/3}grad\, p\,|grad\, p|^{-1/3} \tag{2}$$

Уравнение состояния для малосжимаемой жидкости принимается в виде [I]

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{p-p_0}{\alpha}\right];\ \frac{p_0}{\alpha} \ll 1, \tag{3}$$

где индекс o соответствует параметрам невозмущенного состояния на контуре питания; α – модуль объемной упругости жидкости.

Введем функцию q по формуле [I]

$$q = \int \rho\, dp - \alpha \rho_0 = \alpha(\rho - \rho_0) \tag{4}$$

Согласно (2) – (4) получим закон фильтрации

$$\rho v = -G k^{1/2} \mu^{-1/3} \operatorname{grad} q \,|\operatorname{grad} q|^{-1/3} \tag{5}$$

Для течений с цилиндрической симметрией уравнение неразрывности в неизменяемой пористой среде имеет вид

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) + \frac{1}{r}\rho v = 0, \tag{6}$$

где $m = const$ – пористость среды; r, t – пространственная и временная координаты.

Из (6) с учетом (5) и (4) получим уравнение для определения $q(r,t)\ \left(\frac{\partial q}{\partial r} < 0\right)$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{3}{2r}\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{3m\mu^{1/3}}{2\alpha G k^{1/2}}\left(-\frac{\partial q}{\partial r}\right)^{1/3}\frac{\partial q}{\partial t} \tag{7}$$

Пусть на скважине ($r = R_c$) известно давление p_c , а на границе зоны фильтрации с законом (I) ($r = R_c R$) давление p_r . Для функции q получим условия

$$q(R_c\ t) = \alpha\rho_0\left\{\exp\left(\frac{p_c - p_0}{\alpha}\right) - 1\right\};$$
$$q(R_c\ R, t) = \alpha\rho_0\left\{\exp\left(\frac{p_r - p_0}{\alpha}\right) - 1\right\}, \tag{8}$$

где R , p_c , p_r – функции времени.

Скорость фильтрации согласно (4), (5) определяется формулой

$$v = \frac{\alpha G k^{1/2}}{\mu^{1/3}(\alpha\rho_0 + q)}\left(-\frac{\partial q}{\partial r}\right)^{2/3} \tag{9}$$

2. Перейдем к безразмерным переменным

$$q = \rho_0 p_0 Q(\sigma, \tau),\ r = R_c\sigma,\ t = \frac{3}{2}m(Gk^{1/2})^{-1}(\mu R_c^5 \rho_0 p_0^{-2})^{1/3}\tau,$$
$$v = Gk^{1/2}(\mu^{-1}\rho_0^{-1}p_0^2 R_c^{-2})^{1/3} V(\sigma, \tau). \tag{I0}$$

В безразмерных переменных (I0) уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\sigma^2} + \frac{3}{2\sigma}\frac{\partial Q}{\partial\sigma} = \varepsilon^2\left(-\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right)^{1/3}\frac{\partial Q}{\partial\tau};\quad \varepsilon = \left(\frac{p_0}{\alpha}\right)^{1/2} \ll 1 \tag{II}$$

граничные условия (8) перепишутся в виде

$$Q(1,\tau) = \varepsilon^{-2}\left\{\exp\left(\varepsilon^2\frac{p_c - p_0}{p_0}\right) - 1\right\},\ Q(R,\tau) = \varepsilon^{-2}\left\{\exp\left(\varepsilon^2\frac{p_r - p_0}{p_0}\right) - 1\right\}, \tag{I2}$$

где p_c – давление на скважине; p_r – давление на границе зоны.

Формула (9) примет вид (закон сопротивления)

$$V = \left(1+\varepsilon^2 Q\right)^{-1}\left(-\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)^{2/3}. \tag{13}$$

Наличие малого параметра $\varepsilon \ll 1$ позволяет применить метод деформированных координат.

Решение дифференциального уравнения (11) отыскивается в виде [2]

$$Q(\sigma,\tau,\varepsilon) = Q_0(S,\tau) + \varepsilon^2 Q_2(S,\tau) + \ldots, \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = u = u_0(S,\tau) + \varepsilon^2 u_2(S,\tau) + \cdots \tag{14}$$

$$\sigma = S + \varepsilon^2 \Delta_2(S,\tau) + \ldots, \quad \tau = \tau.$$

Подставляя разложения (14) в уравнение (11), получим для первого члена разложения

$$\frac{\partial Q_0}{\partial S} - u_0 = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial S} + \frac{3}{2S} u_0 = 0. \tag{15}$$

Для второго члена разложения получим

$$\frac{\partial Q_2}{\partial S} - u_2 = \frac{\partial \Delta_2}{\partial S} u_0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial S} + \frac{3}{2S} u_2 = \left(-u_0\right)^{1/3}\frac{\partial Q_0}{\partial \tau} + \tag{16}$$

$$+ \frac{\partial \Delta_2}{\partial S}\frac{\partial u_0}{\partial S} + \frac{3}{2}\frac{\Delta_2}{S^2} u_0.$$

Граничные условия (12) в первом приближении примут вид

$$Q_0 = \frac{p_c - p_0}{p_0} \text{ при } \sigma = 1, \quad Q_0 = \frac{p_r - p_0}{p_0} \text{ при } \sigma = R. \tag{17}$$

Закон сопротивления (13) в первом приближении определится по формуле

$$V = \left(-u_0\right)^{2/3}. \tag{18}$$

3. Уравнения (15) имеют решения

$$u_0 = -\frac{C(\tau)}{S^{3/2}}, \quad Q_0 = 2\frac{C(\tau)}{S^{1/2}} + D(\tau) \tag{19}$$

зависящие от двух произвольных функций $C(\tau)$, $D(\tau)$.

Для получения равномерно пригодного решения потребуем, чтобы правая часть второго уравнения (16) равнялась нулю, а $\Delta_2(1,\tau) = 0$.

Получим задачу для определения диформирующей функции $\Delta_2(S,\tau)$ (штрих означает производную по τ)

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial S} - \frac{\Delta_2}{S} = -\frac{4}{3}\frac{C'}{C^{2/3}} S^{3/2} - \frac{2}{3}\frac{D'}{C^{2/3}} S^2, \quad \Delta_2(1,\tau) = 0 \tag{20}$$

Согласно (14), (19), (20) получим равномерно пригодное решение в первом приближении

$$Q_0 = 2\frac{C(\tau)}{S^{1/2}} + D(\tau), \quad u_0 = -\frac{C(\tau)}{S^{3/2}}, \quad V = \frac{C^{2/3}(\tau)}{S}, \tag{21}$$

$$\sigma = S + \varepsilon^2 S\left[\frac{8}{9}\frac{C'}{C^{2/3}}\left(1 - S^{3/2}\right) + \frac{1}{3}\frac{D'}{C^{2/3}}\left(1 - S^2\right)\right].$$

Следует отметить, что если $R(\tau)$ (следовательно и S) порядка единицы, то в соотношениях (2I) можно считать с принятой точностью, что $\sigma = S$ и получается решение для несжимаемой жидкости.

4. Пусть на скважине ($\sigma = 1$) скорость фильтрации принимает значение

$$V = V_c(\tau) > V_* , \tag{22}$$

где V_* – критическая скорость фильтрации. Если скорость фильтрации больше V_*, то имеет место фильтрация жидкости с законом сопротивления Смрекера (I), (I3).

Из условий (I7), (I8) с учетом (22) при $\sigma = 1$ ($S = 1$) получим значения функций $C(\tau)$, $D(\tau)$, входящих в решение (2I)

$$C(\tau) = V_c^{-1/2}, \quad D(\tau) = \frac{p_c - p_0}{p_0} - 2V_c^{3/2}$$

Из условий на границе зоны фильтрации, подчиняющейся закону сопротивления (I) ($\sigma = R$, $V = V_* - const$) получим

$$S_T = \frac{V_c}{V_*}, \quad \frac{p_c - p_T}{p_0} = 2V_c^{3/2}\left[1 - \left(\frac{V_*}{V_c}\right)^{1/2}\right], \tag{23}$$

$$R = \frac{V_c}{V_*} + \varepsilon^2 \frac{V_c}{V_*}\left[\frac{4}{3}\frac{V_c'}{V_c^{1/2}}\left(1 - \frac{V_c^{3/2}}{V_*^{3/2}}\right) + \frac{1}{3V_c}\left(\frac{p_c'}{p_0} - 3V_c^{1/2}V_c'\right)\left(1 - \frac{V_c^2}{V_*^2}\right)\right],$$

где S_T значение S на границе зоны фильтрации с законом (I).

Формулы (23) определяют потери давления $\frac{p_c - p_T}{p_0}$ в зоне фильтрации с законом (I) и величину этой зоны R.

Если $V_c = O(V_*)$, то вместо (23) получим

$$S_T = R \approx \frac{V_c}{V_*}; \quad \frac{p_c - p_T}{p_0} = 2V_c^{3/2}\left[1 - \left(\frac{V_*}{V_c}\right)^{1/2}\right],$$

что соответствует несжимаемой жидкости.

Если скорость фильтрации на скважине V_c значительно больше критической скорости V_*, то полагая

$$V_* = \varepsilon V_{**}, \quad V_{**} = O(1)$$

получим, согласно (23)

$$S_T = \frac{V_c}{\varepsilon V_{**}^2}, \quad \frac{p_c - p_T}{p_0} = 2V_c^{3/2}, \quad R = \frac{V_c}{\varepsilon V_*}\left\{1 - \right. \tag{24}$$

$$\left. - \frac{V_c}{3V_{**}^2}\left(\frac{p_c - p_0}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)'\right\}.$$

5. Рассмотрим решение этой же задачи методом сращиваемых разло-

жений [2] . Внешнее разложение (при $\sigma = O(1)$) имеет вид (I4) при $\sigma = S$, одночленное внешнее разложение имеет вид (I9) при $\sigma = S$.

Удовлетворяя внешнему условию (I7) при $\sigma = 1$, получим

$$Q_0 = D(\tau) + \left(\frac{p_c - p_0}{p_0} - D(\tau)\right)\frac{1}{\sigma^{1/2}} \tag{25}$$

Введем внутреннее разложение

$$Q = E(\tau) + \varepsilon^{1/2} S^{(1)}(y,\tau) + \dots,\ y = \varepsilon\sigma,\ E = S^{(1)} = y = O(1) \cdot \tag{26}$$

Радиус зоны нелинейной фильтрации определяется как

$$R(\tau) = \varepsilon^{-1} Y(\tau),\ \ Y(\tau) = O(1) \cdot$$

Подставляя разложение (26) в уравнение (II) приходим к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 S^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{3}{2y}\frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial S^{(1)}}{\partial y}\right)^{1/3}\frac{dE}{d\tau} \,. \tag{27}$$

Граничные условия при $\sigma = R$ (внутренние) примут вид

$$E(\tau) = \frac{p_T - p_0}{p_0},\ \ S^{(1)}(Y(\tau),\tau) = 0 \text{ при } y = Y(\tau) \tag{28}$$

Решая уравнение (27) и удовлетворяя условиям (28) получим двучленное внутреннее разложение

$$Q = \frac{p_T - p_0}{p_0} + \varepsilon^{1/2}\int\limits_y^{Y(\tau)}\left[\frac{E_1}{z} - \frac{1}{3}\left(\frac{p_T - p_0}{p_0}\right)' z\right]^{3/2} dz\,,\ \ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = -\left[\varepsilon\left(\frac{E_1}{y} - \frac{1}{3}\frac{p_T'}{p_0}y\right)\right]^{3/2}, \tag{29}$$

где $E_1(\tau)$ – произвольная функция τ .

Из условия сращивания одночленного внешнего разложения (25) и двучленного внутреннего разложения (29) получим

$$D_0 = \frac{p_T - p_0}{p_0},\ \ E_1^{3/2} = \frac{p_c - p_T}{2p_0} \,.$$

Скорость фильтрации согласно (I3) и (I8) примет вид

$$V = \left(\frac{p_c - p_T}{2p_0}\right)^{2/3}\frac{1}{\sigma},\ \ \sigma = O(1) \text{ и } V = \varepsilon\left[\left(\frac{p_c - p_T}{2p_0}\right)^{2/3}\frac{1}{y} - \frac{p_T'}{3p_0}\,y\right],\ y = O(1) \cdot$$

Полагая на скважине $(\sigma = 1)$ $V(1,\tau) = V_c(\tau)$ получим формулу потери давления в зоне нелинейной фильтрации

$$\frac{p_c - p_T}{p_0} = 2V_c^{3/2},$$

что совпадает с соответствующей формулой (24), полученной методом деформированных координат.

На границе зоны нелинейной фильтрации $y = Y(\tau)$ полагая $V = V_*$, получим формулу для радиуса зоны

$$Y = \varepsilon R = \frac{3}{2}\,\frac{V_*}{\varepsilon}\left[\left(\frac{p_c - p_0}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)'\right]^{-1}\left\{\left[1 + \frac{4}{3}\,\frac{V_c}{V_*^2}\,\varepsilon^2\left(\frac{p_c - p_0}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)'\right]^{1/2} - 1\right\}. \tag{30}$$

Если принять

$$V_* = \varepsilon V_{**}\ ,\ V_{**} = O(1), \tag{31}$$

то (30) преобразуется к формуле

$$Y = \varepsilon R = \frac{3}{2}V_{**}\left[\left(\frac{p_c - p_0}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)'\right]^{-1}\left\{\left[1 + \frac{4}{3}\,\frac{V_c}{V_{**}^2}\left(\frac{p_c - p_0}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)'\right]^{1/2} - 1\right\}$$

Если в формуле (30) произвести разложение по степеням малого параметра ε, и оставить два члена разложения, то получим

$$Y=\varepsilon R=\varepsilon\frac{V_c}{V_*}\left[1-\varepsilon^2\frac{V_c}{3V_*^2}\left(\frac{p_c-p_o}{p_o}-2V_c^{3/2}\right)'+\dots\right].$$

С учетом формулы (31) радиус зоны нелинейной фильтрации определяют по уравнению

$$R=\frac{V_c}{\varepsilon V_{**}}\left\{1-\frac{V_c}{3V_{**}^2}\left(\frac{p_c-p_o}{p_o}-2V_c^{3/2}\right)'\right\}. \tag{32}$$

Формула (32) совпадает с соответствующей формулой (24), полученной методом деформированных координат.

Таким образом оба асимптотических метода дают одинаковые результаты в соответствующем приближении для задачи фильтрации сжимаемой жидкости в зоне с нелинейным законом сопротивления (I).

Если кроме описанной зоны имеется зона с линейным законом сопротивления, то суммируя потери давления в этих зонах найдем потери давления во всем пласте. Задача о фильтрации жидкости в зоне с линейным законом сопротивления и в зоне с квадратичным законом сопротивления решена в [4], найдены потери давления в этих зонах. Зону с законом сопротивления (I) можно считать промежуточной между зоной с квадратичным законом и зоной с линейным законом сопротивления.

Литература

1. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ. М., Гостехиздат, 1947.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., "Мир", 1967.
3. Могилевич Л.И. О плоскорадиальной фильтрации сжимаемой жидкости при наличии двух зон с нелинейным и линейным законами сопротивления. Сб.: Аэродинамика, вып.3, Саратовский университет, 1974.
4. Могилевич Л.И. К теории фильтрации сжимаемой жидкости. Сб.: Аэродинамика, вып.4, Саратовский университет, 1975.