М.Н.ШАФЕЕВ

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Отсутствие общего решения плоской задачи Стефана привело к разработке методов решения упрощенных инженерных задач [I] - [4].

Рассмотрим задачу о динамике зон протаивания и отепления дисперсных материалов под плоским источником тепла, расположенным на поверхности полуограниченной среды. Общая формулировка ее описывается следующей системой уравнений и краевых условий:

$$\frac{\partial t_k(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = a_k \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 t_k(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_i^2}, \quad (k=1,2); \qquad (I)$$

при К = I $(x_1, x_2) \in D_{1,\tau} = \left\{ |x_1| < \varepsilon_{1,1}(x_1, x_2, \tau);\ 0 < x_2 < \varepsilon_{1,2}(x_1, x_2, \tau) \right\}$;

при К = 2 $(x_1; x_2) \in D_{2\tau} = D_\tau^{(1)} + D_\tau^{(2)};\ D_\tau^{(1)} = \left\{ |x_1| < \varepsilon_{1,1}(x_1, 0, \tau),\right.$

$\left.\varepsilon_{1,2}(x_1, x_2, \tau) < x_2 < \varepsilon_{2,2}(x_1, x_2, \tau) \right\},\ D_\tau^{(2)} = \left\{ |x_1| < \varepsilon_{2,1}(x_1, x_2, \tau),\right.$

$\left.|x_1| > \varepsilon_{1,1}(x_1, 0, \tau);\ 0 < x_2 < \varepsilon_{2,2}(x_1, x_2, \tau) \right\}$;

$$t_k(x_1, x_2, 0) = f_k(x_1, x_2), \quad (k = 1,2); \qquad (2)$$

$$t_1(x_1, 0, \tau) = \varphi(x_1, \tau), \qquad (3)$$

при $|x_1| < \varepsilon_{1,1}(x_1, 0, \tau)$ и $\tau > 0$;

на $S_{0,\tau} = \left\{ x_2 = 0;\ |x_1| > \varepsilon_{1,1}(x_1, 0, \tau),\ |x_1| < \varepsilon_{2,1}(x_1, 0, \tau) \right\}$

$$t_2(x_1, x_2, \tau) = e_2 \left(1 - \frac{|x_1|}{\varepsilon_{1,1}(x_1, 0, \tau)} \right), \quad \tau > 0; \qquad (4)$$

на границе $S_{1,\tau} = \left\{ F_1(x_1, x_2, \tau) = 0 \right\}$ области $D_{1,\tau}$

$$t_k(x_1, x_2, \tau) = 0, \quad (k = 1,2); \qquad (5)$$

$$A \frac{\partial F_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} + \Big[\big(\lambda_1 \operatorname{grad} t_1(x_1, x_2, \tau) -$$

$$\lambda_2 \operatorname{grad} t_2(x_1, x_2, \tau) \big) \operatorname{grad} F_1(x_1, x_2, \tau) \Big] = 0; \qquad (6)$$

на внешней движущейся границе $S_{2\tau} = \left\{ F_2(x_1, x_2, \tau) = 0 \right\}$ области $D_{2\tau}$

$$t_2(x_1, x_2, \tau) = e_2 \left(1 - \frac{|x_1|}{\varepsilon_{1,1}(x_1, x_2, \tau)} \right) \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon_{1,2}(x_1, x_2, \tau)} \right), \qquad (7)$$

12-8036

где $2\mathcal{E}_{1,1}(x_1, 0, \tau)$ – ширина полосового источника тепла; его минимальная длина равна $2l_1$; $\mathcal{E}_{i,\kappa}(x_1, x_2, \tau)$ и $F_\kappa(x_1, x_2, \tau)$, ($\kappa, i = 1,2$) – достаточно гладкие функции своих аргументов; $\mathcal{E}_{2,i}(x_1, x_2, \tau) = a\,\mathcal{E}_{1,i}(x_1, x_2, \tau)$; a – параметр теплового влияния; $e_2 = \frac{t_0}{1-a}$ При $\tau = 0$ $\mathcal{E}_{1,i} = l_i > 0$; $A = \sigma\gamma_\theta W_\theta$.

Предположим, что $D_{\kappa,\tau}$ – чтырехсторонники [5] – Жордановы области, рассматриваемые вместе с двумя парами замкнутых непересекающихся дуг ($\mathcal{E}_{\kappa,i}$ – дуг) на границе.

Пусть $W = y_1 + iy_2$,

где $y_i = \frac{x_i}{\mathcal{E}_{1,i}(x_1, x_2, \tau)}$, ($i$ = I,2), есть функция, аналитическая в областях $D_{\kappa,\tau} + S_{1,\tau}$ для каждого фиксированного τ, $\tau > 0$. Положим, что эта функция для каждого фиксированного τ, $\tau > 0$, конформно отображает области $D_{\kappa,\tau}$ (К = I,2), плоскости (x_1, x_2) в области $\mathcal{Y}_{1,y} = \{|y_1| < 1,\ 0 < y_2 < 1\}$ и $\mathcal{Y}_{2,y} = \mathcal{Y}_y^{(1)} + \mathcal{Y}_y^{(2)}$ плоскости (y_1, y_2), где $\mathcal{Y}_y^{(1)} = \{|y_1| < 1;\ 1 < y_2 < a\}$ и $\mathcal{Y}_y^{(2)} = \{|y_1| > 1,\ |y_1| < a,\ 0 < y_2 < a\}$. При этом $\mathcal{E}_{\kappa,i}$ – дуги переходят в вертикальные стороны областей $\mathcal{Y}_{\kappa,y}$, а точки M_1 и $M_2 \in S_{1,\tau}$, проектирующиеся на концы отрезка $[-l_1, l_1]$ оси x переходит в точки N_1 (– I,I) и N_2 (I,I).

В результате указанных отображений задача (I) – (5) и (7) приводится к решению уравнений

$$\frac{\partial T_\kappa(y_1, y_2, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{2}\left[A_{\kappa,i}\frac{\partial^2 T_\kappa(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_i^2} + B_i\frac{\partial T_\kappa(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_i}\right] + \Psi_\kappa(y_1, y_2, \tau),$$

$(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}_{\kappa,y}$; $(\kappa = 1,2)$; $\tau > 0$, при однородных граничных условиях и следующих начальных условиях

$$T_\kappa(y_1, y_2, 0) = t_0 - e_\kappa \prod_{i=1}^{2}(\sigma_{y_i} - 1), \ (\kappa = 1,2),$$

в предположении, что $f(x_1, x_2) = t_0$ и $\varphi(x_1, \tau) = t_0\left(1 - \frac{|x_1|}{\mathcal{E}_{1,1}(x_1, 0, \tau)}\right)$,

где $T_\kappa(y_1, y_2, \tau) = t_\kappa(x_1, x_2, \tau) - e_\kappa \prod_{i=1}^{2}(\sigma_{y_i} - 1)$; $\sigma_{y_i} = \begin{cases} |y_1| & \text{при } i = 1; \\ y_2 & \text{при } i = 2; \end{cases}$

$$A_{\kappa,i} = \frac{a_\kappa}{\mathcal{E}_{1,i}^2}\left(1 + y_i^2\, l\left[\mathcal{E}_{1,i}\right]\right); \quad B_i = y_i\frac{\partial \ln \mathcal{E}_{1,i}}{\partial \tau};$$

$$l\left[\mathcal{E}_{1,i}\right] = \sum_{j=1}^{2}\left[\mathcal{E}_{1,i}\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{1,i}}{\partial x_j^2} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{1,i}}{\partial x_j}\right)^2\right]; \quad e_1 = t_e;$$

$$\varphi_\kappa(y_1, y_2, \tau) = e_\kappa \left[(1 - |y_1|) B_1 + \eta (1 - y_2) B_2 \right]; \quad \eta = \begin{cases} -1 \text{ при } x_1 > 0 \\ +1 \text{ при } x_1 < 0. \end{cases}$$

Решение преобразованной задачи находим, применяя дважды вырожденные гипергеометрические преобразования [6], [7] :

$$u_\kappa(\gamma_1, \gamma_2, \tau) = \iint_{\mathcal{D}_{\kappa}} T_\kappa(y_1, y_2, \tau) \prod_{i=1}^{2} K_\kappa(y_i, \gamma_i) \rho_\kappa(y_i) dy_i, \ (\kappa = 1, 2), \tag{8}$$

априори с неизвестными ядрами - $K_\kappa(y_i, \gamma_i)$. При этом полагаем, что постулируемые свойства преобразований (8) равномерны относительно параметров, не являющихся переменными этих преобразований.

Ядро преобразований (8) определяется по уравнению

$$\frac{\partial^2 [A_{\kappa,i} K_\kappa(y_i, \gamma_i) \rho_\kappa(y_i)]}{\partial y_i^2} - \frac{\partial [B_i K_\kappa(y_i, \gamma_i) \rho_\kappa(y_i)]}{\partial y_i} +$$

$$+ \mu_{\kappa,i}^2 K_\kappa(y_i, \gamma_i) \rho_\kappa(y_i) = 0, \tag{9}$$

$(\kappa, i = 1,2)$, при однородных граничных условиях.

Весовые функции находим из условий

$$\frac{a_\kappa}{y_i} \frac{d \ln \rho_\kappa(y_i)}{dy_i} = \varepsilon_{i,i}^2 \frac{\varepsilon_{1,i} \frac{\partial \varepsilon_{1,i}}{\partial \tau} - 2 a_\kappa \ell[\varepsilon_{1,i}]}{\varepsilon_{1,i}^2 + x_1^2 \ell[\varepsilon_{1,i}]}, \ (\kappa, i = 1, 2). \tag{10}$$

Очевидно, что эти равенства наблюдаются только в том случае, когда их обе части равны одной и той же постоянной величине. Обозначим эти постоянные через $\Lambda_{\kappa,i}$, тогда

$$a_\kappa \frac{d\rho_\kappa(y_i)}{dy_i} = \Lambda_{\kappa,i} y_i \rho_\kappa(y_i);$$

$$\varepsilon_{1,i} \frac{\partial \varepsilon_{1,i}}{\partial \tau} = \Lambda_{\kappa,i} + \frac{2 a_\kappa \varepsilon_{1,i}^2 + \Lambda_{\kappa,i} x_1^2}{\varepsilon_{1,i}^2} \frac{\ell[\varepsilon_{1,i}]}{\varepsilon_{1,i}^2}, \ (\kappa, i = 1, 2). \tag{11}$$

Подстановками $K_\kappa(y_i, \gamma_i) = W_\kappa(z_{\kappa,i}, \gamma_i) \exp(-z_{\kappa,i}) \left(\frac{2 z_{\kappa,i}}{\alpha_{\kappa,i}}\right)^{1/2}$,

$$z_{\kappa,i} = \frac{\alpha_{\kappa,i}}{2} y_i^2, \tag{12}$$

при рассматриваемом выборе весовых функций, вследствие (10), уравнения (9) приводятся к вырожденным гипергеометрическим уравнениям

$$z_{\kappa,i} \frac{\partial^2 W_\kappa(z_{\kappa,i}, \gamma_i)}{\partial z_{\kappa,i}^2} + \left(\frac{3}{2} - z_{\kappa,i}\right) \frac{\partial W_\kappa(z_{\kappa,i}, \gamma_i)}{\partial z_{\kappa,i}} - b_{\kappa,i} W_\kappa(z_{\kappa,i}, \gamma_i) = 0, \tag{13}$$

$(\kappa, i = 1, 2)$,

где
$$b_{\kappa,i} = 1 - \frac{\mu^2_{\kappa,i}}{2\Lambda_{\kappa,i}} \left[\frac{\partial \ln \varepsilon_{1,i}}{\partial \tau}\right]^{-1};$$
(I4)
$$\alpha_{\kappa,i} = \left[1 - \frac{2a_\kappa l\,[\varepsilon_{1,i}]}{\varepsilon_{1,i}\,\frac{\partial \varepsilon_{1,i}}{\partial \tau}}\right]^{-1} \frac{\Lambda_{\kappa,i}}{a_\kappa}.$$

Если в (I4) пренебречь квадратами a_κ по сравнению с самими этими величинами, в силу их малости, то
$$\alpha_{\kappa,i} = \frac{\Lambda_{\kappa,i}}{a_\kappa}, \quad (\kappa, i = 1,2). \tag{I5}$$

Решив уравнения (I3) и используя (I2), находим нормированные ядра преобразований (8)

$$K_\kappa(y_i, \gamma_i) = \frac{y_i}{C_{\kappa,\gamma_i}}\,{}_1F_{\kappa 1}\left(b_{\kappa,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, z_{\kappa,\gamma_i}\right) \exp\left(-Y_{\kappa,\gamma_i}\right), (\kappa, i = 1,2);$$
при К = 2 : $i = 1$ для $\varphi_y^{(1)}$ по y_1 и $i = 2$ для $\varphi_y^{(2)}$ по y_2,
$$K_2(y_i, \gamma_i) = \left[C^{(1)}_{2,\gamma_i}\right]^{-1} \Delta_1 F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, z_{2,\gamma_i}\right) \exp\left(-Y_{2,\gamma_i}\right), \quad (i = 1,2),$$
$i = 1$ для $\varphi_y^{(2)}$ по y_1 и $i = 2$ для $\varphi_y^{(1)}$ по y_2,
где ${}_1F_{\kappa 1}$ – вырожденные гипергеометрические функции;
$$Y_{\kappa,\gamma_i} = \begin{cases} 2z_{\kappa,\gamma_i} - \dfrac{\Lambda_{\kappa,i,\gamma_i}}{2a_1} y_i^2 & \text{при условиях (I4)} \\ z_{\kappa,\gamma_i} & \text{при условиях (I5)} \end{cases}$$
$$z_{\kappa,\gamma_i} = \frac{\alpha_{\kappa,i,\gamma_i}}{2} y_i^2.$$
При условиях (I5)
$$C_{\kappa,\gamma_i} = \int_0^{a^{(1)}} y_i^2\,{}_1F^2_{\kappa 1}\left(b_{\kappa,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, z_{\kappa,\gamma_i}\right) \exp\left(-z_{\kappa,\gamma_i}\right) dy_i =$$
$$= q_{\kappa,\gamma_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{\kappa,n}\left(b_{\kappa,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, a_{\kappa,i,\gamma_i}\right)}{b_{\kappa,i,\gamma_i} + n};$$
$$C^{(1)}_{2,\gamma_i} = \int_1^{a} \left[\Delta_1 F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, z_{2,\gamma_i}\right)\right]^2 \exp\left(-z_{2,\gamma_i}\right) dy_i =$$
$$= q_{2,\gamma_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Delta S^{(1)}_{2,n}\left(b_{2,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, \frac{\alpha_{2,i,\gamma_i}}{2}\right)}{b_{2,i,\gamma_i} + n} - \frac{\Delta S^{(2)}_{2,n}\left(b_{2,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, \frac{\alpha_{2,i,\gamma_i}}{2}\right)}{b_{2,i,\gamma_i} + n - 1}\right];$$
$$a_{\kappa,i} = \frac{\alpha_{\kappa,i}}{2} \begin{cases} 1 \text{ при } \begin{cases} \kappa = 1, & i = 1,2; \\ \kappa = 2, & i = 1; \end{cases} \\ a \text{ при } \kappa, i = 2; \end{cases}$$

$$q_{\kappa,\gamma_i}=\frac{2}{3}b_{\kappa,i,\gamma_i}\,{}_1F_{\kappa 1}\left(b_{\kappa,i,\gamma_i}+1,\frac{5}{2},a_{\kappa,i,\gamma_i}\right)exp\left(-a_{\kappa,i,\gamma_i}\right);$$

$$q^{(1)}_{2,i}=exp\left(-\frac{\alpha_{2,i,\gamma_i}}{2}\right)\Big\{a\left(2b_{2,i,\gamma_i}-1\right){}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i},\frac{3}{2},\frac{\alpha_{2,i,\gamma_i}}{2}\right){}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i},\frac{3}{2},a_{2,i,\gamma_i}\right)-$$

$$-\left[\frac{2}{3}b_{2,i,\gamma_i}\,{}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i}+1,\frac{5}{2},a_{2,i,\gamma_i}\right)+{}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i},\frac{3}{2},\frac{\alpha_{2,i,\gamma_i}}{2}\right)\right]{}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},a_{2,i,\gamma_i}\right);$$

$$\Delta_1F_{21}\left(b_{2,i},\frac{3}{2},z_{2,i}\right)=\begin{vmatrix} y_{i\,1}F_{21}\left(b_{2,i},\frac{3}{2},z_{2,i}\right) & {}_1F_{21}\left(b_{2,i}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},z_{2,i}\right)\\ a\,{}_1F_{21}\left(b_{2,i},\frac{3}{2},a_{2,i}\right) & {}_1F_{21}\left(b_{2,i}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},a_{2,i}\right)\end{vmatrix}.$$

Отсюда, заменив в j - м столбце ${}_1F_{21}$ через $S_{2,n}$, с теми же аргументами, получаем $\Delta S^{(j)}_{2,n}\left(b_{2,n},\frac{3}{2},z_{2,i}\right)$, $(i, j=1,2)$, где $S_{n}(a,b,x)$ - n - я частичная сумма вырожденного гипергеометрического ряда для функции ${}_1F_{21}(a,b,x)$.

Очевидно, что нетривиальные решения рассматриваемых задач Штурма - Лиувилля возможны только при значениях $\mu_{\kappa,i}$ и $\Lambda_{\kappa,i}$, удовлетворяющих уравнениям

$${}_1F_{\kappa 1}\left(b_{\kappa,i},\frac{3}{2},\frac{\alpha_{\kappa,i}}{2}\right)=0\ ,\qquad (\kappa,i=1,2); \tag{I6}$$

при К=2 : i = I для $\varphi^{(1)}_y$ по y_1, и i = 2 для $\varphi^{(2)}_y$ по y_2 ;

$$\Delta\,{}_1F_{\kappa 1}\left(b_{2,i},\frac{3}{2},\frac{\alpha_{2,i}}{2}\right)=0,\quad (i=1,2); \tag{I7}$$

i = I для $\varphi^{(2)}_y$ по y_1 и i =2 для $\varphi^{(1)}_y$ по y_2.

Собственные значения указанных задач образуют сплошные спектры, которые зависят от положения и скорости перемещения движущейся границы $S_{1,\tau}$, а также от инерционных свойств среды. Из характеристических уравнений (I6) - (I7) устанавливаем, что

$$\mu^2_{\kappa,i}=e_{\kappa,i}\Lambda_{\kappa,i}\frac{\partial\ln\varepsilon_{1,i}}{\partial\tau},$$

$$\left(2a_\kappa d_{\kappa,i}-\Lambda_{\kappa,i}\right)\varepsilon_{1,i}\frac{\partial\varepsilon_{1,i}}{\partial\tau}=4a^2_\kappa d_{\kappa,i}\,\ell\left[\varepsilon_{1,i}\right],\ (\kappa,i=1,2), \tag{I8}$$

где $e_{\kappa,i}=2\left(1-b_{\kappa,i}\right)=e_{\kappa,i}\left(x_1,x_2,\tau\right)$; $d_{\kappa,i}=\frac{\alpha_{\kappa,i}}{2}=d_{\kappa,i}\left(x_1,x_2,\tau\right)$.

Условия (I5) дают возможность отобрать и нормировать минимальную систему собственных функций в непрерывном спектре рассматриваемых областей.

При таких условиях эти спектры становятся дискретными, а $e_{\kappa,i}$

и $d_{k,i}$ - действительные положительные числа - определяются по таблице нулей вырожденных гипергеометрических функций и корней уравнений (I8) [8], [9].

Из (II) и (I8) при условии (I5) получаем

$$\varepsilon_{1,i}^2 = 2\Lambda_{1,i}\tau + \varphi_{1,i}(x_1, x_2) + \ell_i^2, \quad (i = 1,2), \tag{I9}$$

где $\varphi_{1,i}(x_1, x_2)$ - произвольные дифференцируемые функции своих аргументов. Эти функции, а следовательно, и границу $S_{1,\tau}$ определяем из условия (6).

С помощью преобразований (8) рассматриваемая задача приводится к виду

$$\frac{du_k(\gamma_1,\gamma_2,\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{2}\mu_{1,i,\gamma_i}^2 u_k(\gamma_1,\gamma_2,\tau) = f_k(\gamma_1,\gamma_2,\tau); \; (k=1,2) \tag{20}$$

$$u_1(\gamma_1,\gamma_2,0) = B_{\gamma_1,\gamma_2}^{(1)}; \tag{2I}$$

$$u_2(\gamma_1,\gamma_2,0) = \sum_{i=1}^{2} B_{\gamma_1,\gamma_2}^{(2,i)}, \tag{22}$$

где

$$B_{\gamma_1,\gamma_2}^{(1)} = \prod_{i=1}^{2}\left\{\Delta t_\ell \left[A_{1,\gamma_i}(y)\right]_0^1 - t_\ell\left[B_{1,\gamma_i}(y)\right]_0^1\right\} +$$

$$+\frac{1}{3}t_\ell\left\{\left[A_{1,\gamma_2}(y)B_{1,\gamma_1}(y)\right]_0^1 - \left[A_{1,\gamma_1}(y)B_{1,\gamma_2}(y)\right]_0^1\right\};$$

$$B_{\gamma_1,\gamma_2}^{(2,i)} = 2e_2\Big\{\Big(\varepsilon_i\left[B_{2,\gamma_i}(y)\right]_1^a + \eta_i\left[C_{2,\gamma_i}(y)\right]_1^a\Big)\,{}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a_{2,i,\gamma_i}\right) -$$

$$-\Big(\varepsilon_i\left[D_{2,\gamma_i}(y)\right]_1^a + \eta_i\left[L_{2,\gamma_i}(y)\right]_1^a a\;{}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i}, \frac{3}{2}, a_{2,i,\gamma_i}\right)\Big\}\times$$

$$\times\left\{\left[\Pi_{2,\gamma_\ell}(y)\right]_0^{\varepsilon_i} + \frac{1}{3}B_{2,\gamma_\ell}(\varepsilon_i)\right\};$$

$$f_1(\gamma_1,\gamma_2,\tau) = \sum_{i=1}^{2} C_{\gamma_1,\gamma_2}^{(i)}\frac{\partial \ln \varepsilon_{1,\ell}}{\partial \tau}; \quad \ell = \begin{cases} 1 & \text{при } i=2; \\ 2 & \text{при } i=1; \end{cases}$$

$$f_2(\gamma_1,\gamma_2,\tau) = \sum_{i=1}^{2}\left(C_{\gamma_1,\gamma_2}^{(1,i)}\frac{\partial \ln \varepsilon_{1,\ell}}{\partial \tau} + C_{\gamma_1,\gamma_2}^{(2,i)}\frac{\partial \ln \varepsilon_{1,i}}{\partial \tau}\right);$$

$$C_{\gamma_1,\gamma_2}^{(i)} = t_\ell\,\eta_i\left[A_{1,\gamma_i}(y)\right]_0^1\left\{B_{1,\ell}(1) - \left[C_{1,\gamma_\ell}(y)\right]_0^1\right\};$$

$$C^{(1,i)}_{\gamma_1,\gamma_2} = e_2\Big\{\eta_i\Big[A_{2,\gamma_i}(y)\Big]_0^{\varepsilon_i}\Big[\Big(\Big[B_{2,\gamma_i}(y)\Big]_1^a-\Big[C_{2,\gamma_i}(y)\Big]_1^a\Big)\times$$

$$\times\,{}_1F_{21}\Big(b_{2,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},a_{2,i,\gamma_i}\Big)-\Big(\Big[D_{2,\gamma_i}(y)\Big]_1^a-\Big[F_{2,i}(y)\Big]_1^a\Big)a\,{}_1F_{21}\Big(b_{2,i,\gamma_i},\frac{3}{2},a_{2,i,\gamma_i}\Big)\Big]\Big\};$$

$$C^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2} = e_2\Big\{\eta_i\Big(B_{2,\gamma_i}(\varepsilon_i)-\Big[C_{2,\gamma_i}(y)\Big]_1^a\Big)\Big[\Big[A_{2,\gamma_i}(y)\Big]_1^a\times$$

$$\times\,{}_1F_{21}\Big(b_{2,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},a_{2,i,\gamma_i}\Big)-\Big[E_{2,\gamma_i}(y)\Big]_1^a a\,{}_1F_{21}\Big(b_{2,i,\gamma_i},\frac{3}{2},a_{2,i,\gamma_i}\Big)\Big]\Big\};$$

$$A_{k,\gamma_i}(y)=\frac{1}{\alpha_{k,i,\gamma_i}(b_{k,i,\gamma_i}-1)}\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-1,\frac{1}{2},z_{k,\gamma_i}\Big);$$

$$B_{k,\gamma_i}(y)=\frac{1}{3}y_i^3\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i},\frac{5}{2},z_{k,\gamma_i}\Big);$$

$$C_{k,\gamma_i}(y)=\frac{1}{4}\Big[\frac{y^2}{b_{k,i,\gamma_i}-1}\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-1,\frac{1}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)+\frac{{}_1F_{k1}\big(b_{k,i,\gamma_i}-2,-\frac{1}{2},z_{k,\gamma_i}\big)}{\alpha_{k,i,\gamma_i}(b_{k,i,\gamma_i}-2)_2}\Big];$$

$$D_{k,\gamma_i}(y)=\frac{{}_1F_{k1}\big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},z_{k,\gamma_i}\big)}{\alpha_{k,i,\gamma_i}(3-b_{k,i,\gamma_i})};$$

$$E_{k,\gamma_i}(y)=2y_i\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{3}{2},z_{k,\gamma_i}\Big);$$

$$F_{k,\gamma_i}(y)=\frac{2}{3}y_i^{3}\alpha^{3/2}_{k,i,\gamma_i}\Big\{(2b_{k,i,\gamma_i}-3)\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{5}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)-$$

$$-2(b_{k,i,\gamma_i}-2)\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{3}{2},\frac{5}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)+2z_{k,\gamma_i}\Big[{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{5}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)-$$

$$-\frac{3}{5}\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{7}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)\Big]\Big\};$$

$$L_{k,\gamma_i}(y)=\frac{1}{3}y_i^3\Big[2(b_{k,i,\gamma_i}-z_{k,\gamma_i}-3)\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{1}{2},\frac{5}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)-$$

$$-(2b_{k,i,\gamma_i}-1)\,{}_1F_{k1}\Big(b_{k,i,\gamma_i}-\frac{3}{2},\frac{5}{2},z_{k,\gamma_i}\Big)\Big];$$

$$(a)_n=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1);$$

$$\Pi_{k,\gamma_i}(y)=\begin{cases}A_{k,\gamma_i}(y) & \text{при } i=1;\\ D_{k,\gamma_i}(y) & \text{при } i=2;\end{cases}\qquad \eta_i=\begin{cases}\eta & \text{при } i=1;\\ 1 & \text{при } i=2;\end{cases}\qquad \varepsilon_i=\begin{cases}1 & \text{при } i=1;\\ a & \text{при } i=2.\end{cases}$$

Решив задачу (20) - (22) и осуществив обратные преобразования, получим

$$T_1(y_1,y_2,\tau)=\sum_{\gamma_1=1}^{\infty}\sum_{\gamma_2=1}^{\infty}A^{(1)}_{\gamma_1,\gamma_2}\prod_{i=1}^{2}y_i\,{}_1F_{1}\left(b_{1,i,\gamma_i},\frac{3}{2},z_{1,\gamma_i}\right)exp(-z_{1,\gamma_i}); \quad (23)$$

$$T_2(y_1,y_2,\tau)=\sum_{\gamma_1=1}^{\infty}\sum_{\gamma_2=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}A^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2}y_i\,{}_1F_{21}\left(b_{2,i,\gamma_i},\frac{3}{2},z_{2,\gamma_i}\right)\times \quad (24)$$

$$\times\Delta_1F_{21}\left(b_{2,\ell,\gamma_\ell},\frac{3}{2},z_{2,\gamma_\ell}\right)\prod_{\gamma=1}^{2}exp(-z_{2,\gamma_j}),$$

где $A^{(1)}_{\gamma_1,\gamma_2}=B^{(1)}_{\gamma_1,\gamma_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\ell_i}{\mathcal{E}_{1,i}}\right)^{\varphi_{1,i,\gamma_i}}+D^{(1)}_{\gamma_1,\gamma_2}$;

$$A^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2}=B^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\ell_i}{\mathcal{E}_{1,i}}\right)^{\varphi_{2,i,\gamma_i}}+D^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2},$$

$$D^{(1)}_{\gamma_1,\gamma_2}=\left[\sum_{i=1}^{2}\varphi_{1,i,\gamma_i}\right]^{-1}\sum_{i=1}^{2}C^{(i)}_{\gamma_1,\gamma_2};$$

$$D^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2}=\left[\sum_{i=1}^{2}\varphi_{2,i,\gamma_i}\right]^{-1}\sum_{i=1}^{2}C^{(2,i)}_{\gamma_1,\gamma_2};\ \varphi_{\kappa,i,\gamma_i}=e_{\kappa,i,\gamma_i}\Lambda_{\kappa,i,\gamma_i},$$

где $\mathcal{E}_{1,i}$ определяются по формулам (19).

Используя решения (23) - (24), из условия (6) получаем нелинейные дифференциальные уравнения

$$A\mathcal{E}_{1,i}\frac{\partial\mathcal{E}_{1,i}}{\partial\tau}=B_{1,\ell}\left[\left(1-\frac{\partial\mathcal{E}_{1,i}}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{E}_{1,i}}{\partial x_\ell}\right)^2\right],\ (i=1,2), \quad (25)$$

где $B_{1,\ell}=\sum_{\gamma_1=1}^{\infty}\sum_{\gamma_2=1}^{\infty}\Big\{\lambda_1y_\ell\,a^{(\ell)}_{\gamma_1,\gamma_2}\,{}_1F_{11}\left(b_{1,\ell,\gamma_\ell},\frac{3}{2},z_{1,\gamma_\ell}\right)exp(-z_{1,\gamma_\ell})-$

$$-\lambda_2\left[a^{(\ell,1)}_{\gamma_1,\gamma_2}\Delta_1F_{21}\left(b_{2,\ell,\gamma_\ell},\frac{3}{2},z_{2,\gamma_\ell}\right)+a^{(\ell,2)}_{\gamma_1,\gamma_2}y_\ell\,{}_1F'_{21}\left(b_{2,\ell,\gamma_\ell},\frac{3}{2},z_{2,\gamma_\ell}\right)\right]\times$$

$$\times exp(-z_{2,\gamma_\ell})\Big\}+(\lambda_1t_\ell-\lambda_2e_2)\,\eta_\ell\,(\sigma_{y_i}-1);$$

$$a^{(\ell)}_{\gamma_1,\gamma_2}=\alpha_{1,\ell,\gamma_\ell}\,q_{1,\gamma_\ell}\,A^{(1)}_{\gamma_1,\gamma_2};\ a^{(\ell,j)}_{\gamma_1,\gamma_2}=\alpha_{2,\ell,\gamma_\ell}\,A^{(2,j)}_{\gamma_1,\gamma_2}\begin{cases}q_{2,\gamma_\ell} & \text{при } j=1;\\ q^{(1)}_{2,\gamma_\ell} & \text{при } j=2.\end{cases}$$

Из этой системы, в силу сопряжено гармоничности функций $\frac{x_i}{\mathcal{E}_{1,i}(x_1,x_2,\tau)}$ для каждого фиксированного $\tau, (\tau > 0)$, следует

$$\frac{2\Lambda_{1,2}\tau + \Phi_{1,2}(x_1,x_2) + \ell_2^2}{2\Lambda_{1,1}\tau + \Phi_{1,1}(x_1,x_2) + \ell_1^2} = \frac{\Lambda_{1,2}B_{1,2}}{\Lambda_{1,1}B_{1,1}} \qquad (26)$$

где в правой части $\mathcal{E}_{1,i}$ заменяются по формулам (I9).

Выражение (26) содержит две неизвестные функции $\Phi_{1,i}(x_1,x_2)$, (i = I,2). Второе соотношение для определения этих функций находим путем решения одного из уравнений (25), которые методом Лагранжа-Шарпи [10] приводится к уравнениям Пфаффа

$$d\Phi_{1,i}(x_1,x_2) = \frac{\left[1 - C_{1,i}\cos\varphi_i(\tau)\right]dx_i + C_{1,i}\sin\varphi_i(\tau)\,dx_i}{2\left[2\Lambda_{1,i}\tau + \Phi_{1,i}(x_1,x_2) + \ell_i^2\right]^{1/2}},\ (i=1,2), \qquad (27)$$

с параметрами $\varphi_i(\tau)$,

где $C_{1,i} = \left[\frac{A\Lambda_{1,i}}{B_{1,i}}\right]^{1/2}\frac{1}{x_i y_i}$

при $y_i = 1 + \frac{x_i - x_i}{1-ctg\varphi_i(\tau)}$ и $\ell_2 = 0$

Интеграция уравнений (27) приводится к квадратурам и дает полные интегралы уравнений (25). Из этих решений определяются функции $\Phi_{1,i}(x_1,x_2)$, используя которые в силу (I9), устанавливается форма и закон движения границы $S_{1,\tau}$ и с учетом (23) - (24) характер распределения потенциалов переноса тепла в зонах оттаивания и отепления.

Литература

I. Будак Б.М. и др. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана.- Сб. работ ВЦ МГУ: Численные методы в газовой динамике, 4, Изд. МГУ, I965.

2. Порхаев И.Г. и др. Теплофизика промерзающих и протаивающих грунтов. М., " Наука", I964.

3. Иванов Н.С. Тепло - и массоперенос в мерзлых горных породах. М., " Наука", I969.

4. Чернышев А.Д. Решение плоской, осесимметричной и пространственной однофазной задачи Стефана. ИФЖ, 27, № 2, I974, с. 34I-350.

5. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М., " Мир", 1969.
6. Ш а ф е ё в М.Н. О методе вырожденных гипергеометрических преобразований. Материалы научно-технической конференции, КУАИ, 1972.
7. Ш а ф е е в М.Н. Автореферат докторской диссертации. Минск, 1974.
8. Reports BA Committee for the Calculation of Mathematical Tables, Lond, 1926.
9. С л е т е р Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.
10. К у р а н т Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. т.II, М.-Л., Гостехиздат, 1951.

В.Я.ДАВЫДОВ, Г.В.ФИЛИППОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Если на тело, перемещающееся в вязкой среде на заданное расстояние z_κ за определенное время τ_κ, действует центральная сила, уменьшающаяся пропорционально квадрату расстояния $P = \frac{P_0}{z^2}$, то, имея в виду инерционные свойства перемещаемого объекта, можно сформулировать следующую вариационную задачу при квадратичном законе сопротивления: найти управление P_0, дающее минимум функционалу

$$A = \int_0^{\tau_\kappa} P_0 \, d\tau ,$$

если фазовые координаты V и z удовлетворяют уравнениям связи

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{P_0}{z^2} - V^2 ; \quad \frac{dz}{d\tau} = aV \tag{I}$$

и граничным условиям

$$\tau = 0 : \ V = 0, \ z = 1; \quad \tau = \tau_\kappa : \ V \geqslant V_\kappa , \ z = z_\kappa .$$

На управление наложено ограничение

$$0 \leqslant P_0 \leqslant 1,$$

V - скорость движения тела, a - константа.

Воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [I]. Запишем функцию Гамильтона

$$H = -P_0 + \psi_z aV + \psi_V \left(\frac{P_0}{z^2} - V^2 \right).$$