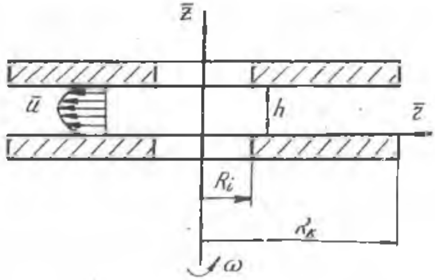
3. Б е р л и н Г.С. Электронные приборы с механически управляемыми электродами. М., " Энергия", 1971.
4. П а т р и н, Ш н е й д е р м а н. Некоторые характеристики ускорителя с магнитной кольцевой дугой. – " Ракетная техника и космонавтика", 1966, № 2, с.1012-1016.
5. Ж у р а в л е в О.А. и др. Экспериментальное исследование струи плазменного ускорителя с внешним магнитным полем. – В сб.: Материалы II Всесоюзной конференции по плазменным ускорителям,Минск, 1973, с. 221-222.
6. Ф и л и п п о в Б.В. Обтекание тел разреженной плазмой. – В сб.: Аэродинамика разреженных газов. Изд. ЛГУ, 1969, вып.IУ,с.133-141.
7. К о г а н М.Н. Динамика разреженного газа. М., "Наука", 1967.
8. Ч е к а л и н Э.К., Ш у м а н о в В.С. Истечение струи металлической плазмы в вакуум. – В сб.: Исследования по физической газодинамике. М., "Наука", 1966, с.101-108.
9. К у р ы ш е в А.П. и др. Влияние тепловых скоростей ионов на аэродинамические характеристики тел в разреженной плазме. – В сб.: Аэродинамика разреженных газов. Изд. ЛГУ, 1969, вып.IУ, с. 149-162.

УДК 532.516

П.И. С а н ь к о в

РАДИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ДИСКОМ

Рассмотрим осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя параллельными коаксиальными дисками внешнего радиуса $R_к$ (рис.I), имеющими внутреннее отверстие радиуса R_i и отстоящими друг от друга на расстоянии h. Нижний диск вращается с постоянной угловой скоростью ω, верхний – неподвижный, (система координат показана на рис.I). Величину расхода в радиальном направлении обозначим через Q.



Р и с.I. Схема течения жидкости и система координат

Будем рассматривать случай относительно узких зазоров, т.е. наложим условие $h \ll (R_к - R_i)$.

При этом течение в зазоре можно описать уравнениями движения типа уравнений пограничного слоя:

$$U\frac{\partial U}{\partial r} + W\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{dp}{dr} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \qquad (I)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial r} + W\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (2)$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rU)}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \qquad (3)$$

Граничные условия к системе (I) – (3) имеют вид

$$z = 0: \quad U = 0, \quad V = Re_n\, r, \quad W = 0; \qquad (4)$$

$$z = 1: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

Система (I) – (3) и условия (4) записаны в безразмерных переменны

$$z = \frac{\bar{z}}{h}, \quad r = \frac{\bar{r}}{h};$$

$$U = \bar{U}\frac{h}{\nu}; \quad V = \bar{V}\frac{h}{\nu}; \quad W = \bar{W}\frac{h}{\nu};$$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho(\nu/h)^2}, \quad Re_n = \frac{\omega h^2}{\nu};$$

$$q = \frac{Q}{2\pi h \nu} = \int_0^1 r U dz, \qquad (5)$$

где U, V, W – проекции вектора скорости;
p – давление в зазоре;
ρ – плотность жидкости;
ν – кинематическая вязкость
(черта сверху отмечает размерные величины).

На выходе из зазора поставим условие для давления

$$r = r_K: \quad p = p_K. \tag{6}$$

Здесь и далее величинам с индексом К соответствуют их значения на выходе, с индексом i – на входе в зазор.

Воспользуемся для построения итерационного процесса решения системы (I) – (3) с граничными условиями (4) методикой, предложенной в работе [I].

Интегрируя уравнение (I) поперек зазора от $z=0$ до некоторого z внутри зазора дважды с учетом (4), получим

$$U = \frac{1}{2}\frac{dp}{dr} z(z-1) + f - Fz; \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(\frac{1}{2}\frac{dp}{dr} + F\right),$$

где

$$f(r,z) = \int_0^z\int_0^{\varsigma}\left(U\frac{\partial U}{\partial r} + W\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r}\right)d\beta\, d\varsigma;$$

$$F(r) = f(r;1).$$

Аналогично для уравнения (2)

$$V = Re_n\, r(1-z) + g - Gz; \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(Re_n\, r + G\right).$$

где

$$g(r;z) = \int_0^z\int_0^{\varsigma}\left(U\frac{\partial V}{\partial r} + W\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r}\right)d\beta\, d\varsigma;$$

$$G(r) = g(r;1).$$

Из уравнения неразрывности (3) следует

$$W = -\int_0^z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)\, d\varsigma. \tag{9}$$

При подстановке (7) в условие (5), получим формулу, определяющую изменение давления вдоль радиуса

$$\frac{dp}{dz}=-12\frac{q}{z}+6\,(E-F), \qquad (10)$$

где

$$E=2\int_0^{1} f\,(z;\,z)\,dz\,.$$

Проинтегрируем (10) с учетом (6)

$$p-p_к=-12\,q\,\ln\left(\frac{z}{z_к}\right)-6\int_z^{z_к}(E-F)\,dz\,. \qquad (11)$$

Величину давления, которая согласуется с заданной величиной расхода, получим при подстановке $z=z_i$ в выражение (11).

Выберем в качестве начального решения системы (1) - (3) с граничными условиями (4) решение для случая, когда пренебрегают всеми инерционными членами, кроме центробежного в (1).

Подобное решение получено, например, в работе [2] и имеет вид

$$U=-\frac{6q}{z}\,z\,(z-1);\quad V=Re_n\,z\,(1-z); \qquad (12)$$

$$W=0;\ \frac{dp}{dz}=\frac{3}{10}\,Re_n\,z-\frac{12q}{z}\,.$$

На основании (12) запишем инерционные члены в систему (1) - (2) и определим интегральные функции f, F, g, G, E. Подстановка E и F в (11) позволяет найти распределение давления в первом приближении, подстановка этих функций в (10) и обращение к (7), (8) и (9) дают первое приближение для составляющих скорости $U^{(1)}$, $V^{(1)}$, $W^{(1)}$, которое служит исходным для следующего приближения.

Опуская несложные выкладки, приведем сводку результатов

$$U^{(1)}=\frac{6q}{z}\,z\,(z-1)-\frac{6q^2}{z^3}\left(\frac{z^6}{5}-\frac{3}{5}z^5+\frac{z^4}{2}-\frac{z}{10}\right)-Re_n^2\,z\left(\frac{z^4}{12}-\frac{z^3}{3}+\frac{7}{20}z^2+\frac{z}{10}\right);$$

$$V^{(1)}=Re_n\,z\,(1-z)+\frac{q\,Re_n}{z}\left(\frac{3}{5}z^5-2z^4+2z^3-\frac{3}{5}\,z\right);$$

$$W^{(1)}=Re_n^2\left(\frac{z^5}{30}-\frac{z^4}{6}+\frac{7}{30}z^3-\frac{z^2}{10}\right)-\frac{12q^2}{z^4}\left(\frac{z^7}{35}-\frac{z^6}{10}+\frac{z^5}{10}-\frac{z^2}{10}\right);$$

$$p^{(1)}-p_к=\frac{3}{20}\,Re_n\,(z^2-z_к^2)-12\,q\ln\left(\frac{z}{z_к}\right)-\frac{27}{35}\,q^2\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_к^2}\right). \qquad (13)$$

Введенный момент трения

$$M = -\int_{z_i}^{z_\kappa} z^2 \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} dz$$

подсчитывается согласно (8)

$$M^{(1)} = \frac{Re_n}{4}\left[\left(z_\kappa^4 - z_i^4\right) + \frac{6}{5} q \left(z_\kappa^2 - z_i^2\right)\right].$$

Формулу во втором приближении запишем лишь для важнейшей характеристики – момента трения вращающегося диска

$$\frac{4M^{(2)}}{Re_n} = \left(1+0{,}00422\, Re_n^2\right)\left(z_\kappa^4 - z_i^4\right) + 1{,}2q\left[\left(1+0{,}00084\, Re_n^2\right)\left(z_\kappa^2 - z_i^2\right) + 0{,}1269\, q \ln\left(\frac{z_\kappa}{z_i}\right)\right]. \quad (I4)$$

Рассмотрим случай " естественного " подсоса. При вращении диска за счет трения на его поверхности жидкости в зазоре сообщается окружная скорость, и возникающие при этом центробежные силы приводят к появлению радиального течения. Расход определяется условиями подвода жидкости в зазор, который может осуществляться прямо из атмосферы, или, например, через длинную цилиндрическую трубку. В первом случае условие на входе в зазор может быть сформулировано следующим образом: полагая, что профиль скорости на входе в зазор однородный, а подтекание по входу – потенциальное, во входном сечении запишем интеграл Бернулли:

$$p - p_a = -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{z_i}\right)^2 \quad при \quad z = z_i , \qquad (I5)$$

где p_a – атмосферное давление.

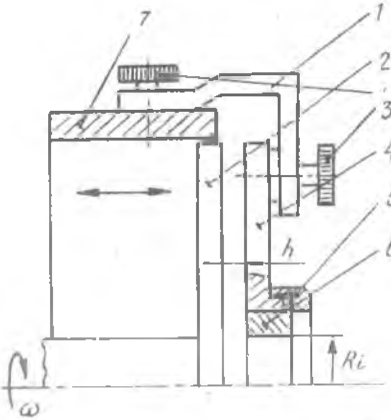
Положим $p_\kappa = p_a$, тогда из (II) и (I5) следует условие для определения расхода

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q}{z_i^2}\right)^2 + 12 q \ln\left(\frac{z_\kappa}{z_i}\right) - 6\int_{z_i}^{z_\kappa} (E-F)\, dz = 0 ,$$

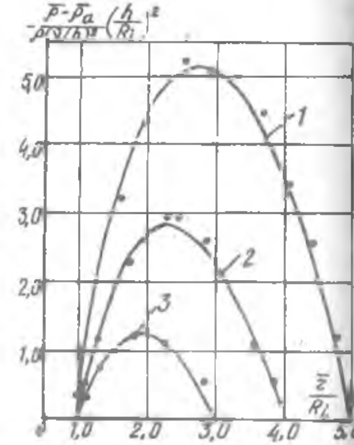
причем, в первом приближении

$$\left[\frac{1}{2 z_i^2} + \frac{27}{35}\left(\frac{1}{z_\kappa^2} - \frac{1}{z_i^2}\right)\right]\left(q^{(1)}\right)^2 + 12 q^{(1)} \ln\left(\frac{z_\kappa}{z_i}\right) - \frac{3}{20}\left(z_\kappa^2 - z_i^2\right) Re_n^2 = 0.$$

Распределение давления по радиусу дисков в случае "естественного подсоса" было исследовано на экспериментальной установке, принципиальная схема которой приведена на рис.2. Металлический диск 2 диаметром 204 мм на валу приводился во вращение электродвигателем постоянного тока, посредством изменения напряжения на котором скорость вращения регулировалась в пределах 100–6500 об/мин. Неподвижный диск 4 с помощью трех кронштейнов I крепился на подвижном кожухе 7, перемещением которого устанавливалась высота зазора; величина h фиксировалась щупом. Грубая регулировка параллельности дисков производилась винтами 3, точная - регулировкой уровня давления в дренажных сечениях (диск 4 и втулки 6 были дренированы по трем радиальным направлениям через 120°). Во всех экспериментах отличие измеряемых величин в точках на разных направлениях составляло не более 3%. Измерения давления производились микроманометрами типа



Р и с.2. Схема экспериментальной установки



Р и с.3. Распределение давления по радиусу диска $Re_h = 2{,}0$: I - $\frac{R_k}{R_i} = 5$; 2 - $\frac{R_k}{R_i} = 4$; 3 - $\frac{R_k}{R_i} = 3$

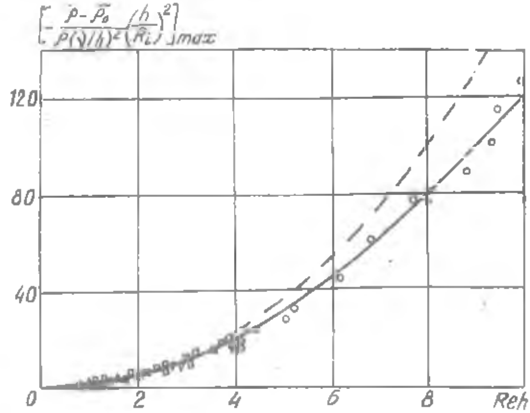
ЦАГИ. Смена втулки 6 под накидной крышкой 5 позволяла регулировать размер внутреннего отверстия. Для каждого значения зазора измерения проводились многократно, а их результаты осреднялись, причем каждый раз зазор устанавливался заново.

Результаты измерений распределения давления в зазоре и расчета по формуле (13) показаны на рис.3. Качественный характер кривой давления с максимумом разрежения внутри зазора сохранялся при $h < 1$ мм в исследованном диапазоне изменения угловой скорости. Сравнение результатов экспериментальных и расчетных значений максимума разрежения (рис. 4) показывает их хорошее совпадение вплоть до $Re_h = 10$.

Введем коэффициент момента трения

$$C_m = \frac{2\bar{M}}{\rho \omega^2 R_k^5} .$$

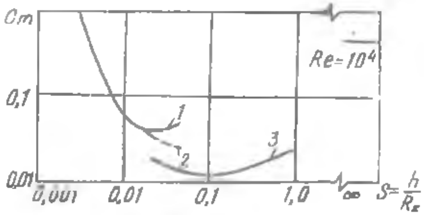
Результаты расчета C_m (рис.5) показали наличие линейного участка в области малых относительных зазоров.



Р и с. 4. Максимальное локальное разрежение в зазоре R_K/R_i = 5:
– формула (30); – – – формула (26); Δ – h = = 0,1мм; ∇ – h = 0,2 мм; $\square$ – h =0,3 мм; $\circ$ – h =0,5 мм

При увеличении зазора вид зависимости C_m от S меняется, результаты, полученные во втором приближении, указывают на существование минимума величины C_m .

На рис.5 приведены результаты эксперимента [3] по измерению



Р и с.5. Расчет коэффициента момента трения, режим " естественного подсоса " $Re = \frac{\omega R_K^2}{\nu}$: I – формула(33); 2 – формула (32); 3 – [3]

момента трения на диске в закрытом кожухе и расчетное значение C_m для диска в свободном пространстве, которые качественно хорошо согласуются с результатами расчета по формуле (I4) для $Re = \frac{\omega R_к^2}{\nu} = 10^4$.

В заключении отметим, что полученное решение легко обобщается для случая конического зазора [4].

Л и т е р а т у р а

I. М э т ч П., Р а й с У. Асимптотическое решение для ламинарного течения несжимаемой жидкости между вращающимися дисками.- " Прикладная механика", I968, т.35, № 4.

2. П е л е х Д., Ш а п и р о А. Гибкий диск, вращающийся на газовом слое вблизи стенки. - " Прикладная механика", I964. т.3I, № 4.

3. Pantell K. Forchung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1950, в.16, s 97-108.

4. Р а й с У., М а к - А л и с т е р К. Ламинарное течение ньютоновской жидкости между соосными вращающимися конусами.- "Прикладная механика", I970, т.37, № I.