

- ристик профиля, движущегося вблизи плоской стенки. - РЖ "ВТЭ", серия "А", вып. 29. Деп. № Д03661, 1978.
4. Введение в аэроупругость /С.М.Белоцерковский, Ю.А.Кочетков, А.А.Красовский, В.В.Новицкий.- М.:Наука, 1980.
 5. *Baker P.A. Schwabhaard w. G. Flight evaluation of ground effect on several low-aspect-ratio airplanes. - NASA TND-6053, October, 1970.*
 6. Горелов Д.Н., Куляев Р.Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью. - АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.

УДК 533.6.011.32

З.Х.Нугманов, В.Г.Павлов, М.Г.Шарафеев

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ

Излагается численный метод построения контура крылового профиля по заданному распределению давления на его поверхности в потенциальном потоке несжимаемой жидкости.

Решению обратной задачи аэродинамики на основе метода конформных отображений и гидродинамических особенностей, размещенных по контуру профиля, посвящен целый ряд работ [1] - [14]. В последние годы получили широкое распространение численные методы расчета, базирующиеся на решении интегродифференциального уравнения, выражающего условие совпадения контура профиля с одной из линий тока [6] - [9], [11] - [14].

Наиболее простой и эффективный метод решения уравнения линии тока дан в работах [6] - [9]. В работах [12], [13] авторам удалось достичь высокой степени точности решения интегродифференциального уравнения благодаря применению аналитического способа вычисления интегралов на отдельных элементах поверхности профиля (панелях). Такой способ вычислений позволяет повысить точность расчетов при проектировании профилей с заостренными задними кромками.

В данной работе также решается уравнение линии тока относительно искомого ординаты профиля. Но в отличие от методов [6] и [12] здесь для описания контура профиля применен ряд из полиномов Якоби, удовлетворяющий условиям замкнутости и формы кромок профиля. Кроме того, задавая коэффициенты ряда, можно получить профили с заданными геометрическими характеристиками (толщины, кривизны и т.д.). Задача решена методом

последовательных приближений, в котором в качестве начального приближения взято уравнение симметричного профиля.

Математическое описание замкнутого контура. Уравнение профиля крыла представим в параметрической форме

$$x = \cos \theta, \quad y = y[x(\theta)],$$

где изменению параметра θ от нуля до 2π соответствует обход контура против часовой стрелки. Хорда профиля принята равной 2.

Уравнения верхней и нижней поверхностей контура представим в виде

$$y_B = y_f + y_c, \quad y_H = y_f - y_c, \quad (1)$$

где y_f и y_c - функции, описывающие среднюю линию и симметричную составляющую контура профиля.

Приближенные значения y_f и y_c найдем в виде полного ортогонального ряда из полиномов Якоби [5]:

$$\begin{aligned} y_f &= B_f \sum_{n=1}^{N_f} a_{fn} P_{fn} = \sum_{n=1}^{N_f} a_{fn} Q_{fn}, \\ y_c &= B_c \sum_{n=1}^{N_c} a_{cn} P_{cn} = \sum_{n=1}^{N_c} a_{cn} Q_{cn}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{где } B_f = \sqrt{(1+x)^2(1-x)^2} = 1-x^2,$$

$$B_c = \sqrt{(1+x)^{\beta_1}(1-x)^{\beta_2}} = (1-x)\sqrt{(1+x)}. \quad (3)$$

Значения β_1 и β_2 задаются в зависимости от вида кромок симметричного профиля. Если передняя кромка профиля закруглена, а задняя - заострена, то $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$. Функции Якоби P_{fn} и P_{cn} для этого случая находим из следующих соотношений:

$$P_{fn} = \frac{n+1}{(n-1)(n+3)} [(2n+1)xP_{n-1}(x) - nP_{n-2}(x)]; \quad (4)$$

$$P_{cn} = \frac{n\{(4n^2-1)x+3\}P_{n-1}(x) - (n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)}{(n-1)(n+2)(2n-1)}, \quad (5)$$

$$\text{где } P_{f1} = 1, \quad P_{f2} = 3x, \quad P_{f3} = 7x^2 - 1, \dots;$$

$$P_{c1} = 1, \quad P_{c2} = 0,5(5x+1), \quad P_{c3} = 3(7x^2+2x-1)/4, \dots$$

Если профиль задан в виде дискретных значений координат, то контур этого профиля можно описать аналитически с помощью уравнений (2). Коэффициенты ряда в этом случае определяются по формулам

$$a_{fn} = H_{fn} \int_0^{2\pi} y_f(\theta) Q_{fn} \sin \theta d\theta, \quad (6)$$

$$a_{cn} = H_{cn} \int_0^{2\pi} y_c(\theta) Q_{cn} \sin \theta d\theta,$$

где $y_f(\theta)$ и $y_c(\theta)$ - заданные функции, например, в виде полиномов Лагранжа:

$$H'_{fn} = \frac{(n+2)(n+3)(2n+3)}{32n(n+1)}, \quad H'_{cn} = \frac{(n+1)(n+2)}{8n}.$$

Значения производных от y_f и y_c по параметру θ следующие:

$$y'_f = \frac{dy_f}{d\theta} = -y'_f \sin \theta;$$

$$y'_c = \frac{dy_c}{d\theta} = -y'_c \sin \theta,$$

где

$$y'_f = \frac{dy_f}{dx} = \sum_{n=1}^{N_f} a_{fn} (B'_f P_{fn} + B_f P'_{fn});$$

$$y'_c = \frac{dy_c}{dx} = \sum_{n=1}^{N_c} a_{cn} (B'_c P_{cn} + B_c P'_{cn});$$

$$B'_f = -2x, \quad B'_c = -\frac{1+3x}{2(1+x)^{1/2}}.$$

Формулы для определения P'_{fn} и P'_{cn} получаются из выражений (4) и (5).

Функция y'_c имеет особенность в точке $x = -1$. Раскрывая неопределенность, получаем:

$$y'_c = -\sum_{n=1}^{N_c} a_{cn} \left(\frac{1+3\cos\theta}{\sqrt{2}} P_{cn} \sin \frac{\theta}{2} - B_c P'_{cn} \sin \theta \right).$$

По формулам (2) - (6) была найдена геометрия профиля В-12 по ее дискретным значениям координат. Коэффициенты ряда для этого профиля при шаге интегрирования $H = 2,2480$ имеют значения:

$$\begin{aligned} a_{f1} &= 0,02953386; & a_{f2} &= -0,01469619; & a_{f3} &= -0,00012664; \\ a_{f4} &= 0,00000787; & a_{f5} &= -0,00009100; & a_{f6} &= -0,00014743; \\ a_{f7} &= -0,00001347; & a_{f8} &= -0,00006354; & a_{f9} &= -0,00002957; \\ a_{c1} &= 0,10936284; & a_{c2} &= 0,00180154; & a_{c3} &= -0,00062967; \\ a_{c4} &= 0,00148459; & a_{c5} &= -0,00018557; & a_{c6} &= 0,00032115; \\ a_{c7} &= -0,00007080; & a_{c8} &= 0,00016342; & a_{c9} &= 0,00003874. \end{aligned}$$

При этом максимальная местная ошибка в вычислении координат составляет около 5% при сохранении числа членов $n = 8$.

Из выражений (2) и (3) видно, что значения ординат профиля при $x = \pm 1$ равны нулю, т.е. искомый контур получается замкнутым при любых значениях коэффициентов a_{fn} и a_{cn} . Следовательно, имеем

$$x(0) = x(2\pi) = 0, \quad y(0) = y(2\pi) = 0.$$

В работе [9] показано, что если вначале выбран замкнутый профиль и $V(0) = V(2\pi)$, то для любого приближения справедливо

$$y'(0) = y'(2\pi).$$

Для получения самонепересекающегося профиля необходимо соблюдать условие $y'_c > 0$. В том случае, если $V(y)$ приводит к сампересекающемуся

контуру, то следует этору $V(\varphi)$ подправить [9].

Решения обратной задачи построения изолированного профиля. Если по поверхности крылового профиля разместить непрерывный вихревой слой, то условие того, что контур является линией тока, приводит к интегральному соотношению [6]:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \bar{V}(\varphi) \ln R(\theta, \varphi) \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\varphi + y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha = \text{const}, \quad (7)$$

где $R(\theta, \varphi) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

Взяв константу равной значению левой части интеграла (7) при верхней кромке профиля с координатами x_0, y_0 , будем иметь [6]:

$$y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{4\pi \cos \alpha} \oint_S \ln \frac{R(\theta, \varphi)}{R(\theta_0, \varphi)} \bar{V}(\varphi) d\varphi,$$

где $ds = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\varphi$, $R(\theta_0, \varphi) = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 = R_0$.

Уравнения верхней и нижней поверхностей в соответствии с формулой (1) запишутся в виде

$$y_B = y_f + y_c = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{4\pi \cos \alpha} \oint_S \ln \frac{R_B}{R_0} \bar{V}(s) ds; \quad (8)$$

$$y_H = y_f - y_c = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{4\pi \cos \alpha} \oint_S \ln \frac{R_H}{R_0} \bar{V}(s) ds,$$

где $R(\theta_B, \varphi) = (x - \xi)^2 + (y_B - \eta)^2 = R_B$;

$$R(\theta_H, \varphi) = (x - \xi)^2 + (y_H - \eta)^2 = R_H.$$

Складывая и вычитая выражения (8), найдем:

$$y_f = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{8\pi \cos \alpha} \oint_S \ln \frac{R_B R_H}{R_0 R_0} \bar{V}(s) ds;$$

$$y_0 = - \frac{1}{8\pi \cos \alpha} \oint_S \ln \frac{R_B}{R_H} \bar{V}(s) ds.$$

Подставляя значения полиномов (2) и (3) в предыдущие формулы, умножая левую и правую части на Q_{fn} и Q_{cn} и интегрируя, получим:

$$a_{fn} = H_{fn} \left[\operatorname{tg} \alpha \int_{-1}^{+1} (x - x_0) Q_{fn} dx - \frac{1}{8\pi \cos \alpha} \oint_S \ln \frac{R_B R_H}{R_0 R_0} \bar{V} Q_{fn} ds dx \right],$$

$$a_{cn} = - \frac{H_{cn}}{8\pi \cos \alpha} \int_{-1}^{+1} \oint_S \ln \frac{R_B}{R_H} \bar{V} Q_{cn} ds dx.$$

Интегралы вычисляются по методике панельного метода [12].

Определение угла атаки. В выражении (7) зададим константы такими, чтобы линия тока проходила через заднюю кромку (x_0, y_0) и переднюю кромку профиля (x_n, y_n). Будем иметь

$$\varphi = y_0 \cos \alpha - x_0 \sin \alpha + \frac{1}{4\pi} \oint_S \ln R(\theta, \varphi) \bar{V} ds,$$

$$\varphi = y_n \cos \alpha - x_n \sin \alpha + \frac{1}{4\pi} \oint_S \ln R(\theta, \varphi) \bar{V} ds.$$

Вычитая из первого выражения второе, получим:

$$-(x_0 - x_n) \sin \alpha + \frac{1}{4\pi} \oint_S \ln \frac{R(\theta_0, \varphi)}{R(\theta_n, \varphi)} \bar{V} ds + (y_0 - y_n) \cos \alpha = 0.$$

Откуда

$$\sin \alpha = \frac{1}{4\pi(x_0 - x_n)} \oint \ln \frac{R(\theta_0, y)}{R(\theta_n, y)} \bar{V} ds + \frac{y_0 - y_n}{x_0 - x_n} \cos \alpha.$$

Угол атаки вычисляется методом итераций на каждом этапе определения контура профиля.

Вычисление двойных интегралов. Контур профиля представим в виде плоских элементарных панелей, концы n -й панели имеют координаты x_n, y_n и x_{n+1}, y_{n+1} . Тогда расстояние от точки x_k, y_k до произвольной точки панели (смотри рисунок) определится формулой

$$R^2 = a^2 + \left(b + \frac{\Delta S_n}{2} - S_1 \right)^2,$$

где

$$S_1 = \frac{\Delta S_n}{n} y_1, \quad \Delta S_n = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2};$$

$$a^2 = R_1^2 - \left(b + \frac{\Delta S_n}{2} \right)^2, \quad b = (R_1^2 - R_2^2) / 2 \Delta S_n.$$

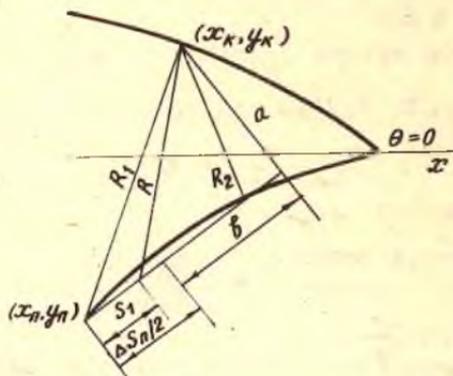


Рис. Характерные геометрические элементы

здесь

$$R_1^2 = (x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2;$$

$$R_2^2 = (x_k - x_{n+1})^2 + (y_k - y_{n+1})^2.$$

Рассмотрим вычисление интеграла

$$J(\theta) = \oint \ln \left\{ [x(\theta) - x(y)]^2 + [y(\theta) - y(y)]^2 \right\} \bar{V} ds. \quad (9)$$

на малом участке $0 \leq S_1 \leq S_n$ значение относительной скорости представим в форме

$$\bar{V}(S_1) = \bar{V}(y_n) + \frac{\bar{V}(y_{n+1}) - \bar{V}(y_n)}{\Delta S_n} S_1.$$

Тогда интеграл (9) на том же интервале приобретает вид

$$\Delta J_n = \int_0^{\Delta S_n} \ln \left[a^2 + \left(b - \frac{\Delta S_n}{2} - s_1 \right)^2 \right] [\bar{V}(y) + \bar{V}' s_1] ds_1, \quad (10)$$

где
$$\bar{V}' = \frac{\bar{V}(y_{n+1}) - \bar{V}(y_n)}{\Delta S_n}.$$

После вычисления интеграла (10) получаем:

$$\Delta J_n = \left[\bar{V}(y_n) + \bar{V}' \left(b + \frac{\Delta S_n}{2} \right) \right] E_1 - \bar{V}' E_2,$$

где

$$E_1 = \left(b + \frac{\Delta S_n}{2} \right) \ln R_1^2 - \left(b - \frac{\Delta S_n}{2} \right) \ln R_2^2 - 2 \Delta S_n +$$

$$+ 2a \left[\operatorname{arctg} \frac{|b| + \frac{\Delta S_n}{2}}{a} - \operatorname{arctg} \frac{|b| - \frac{\Delta S_n}{2}}{a} \right],$$

$$E_2 = 0,5 \left[R_1^2 \ln R_1^2 - \left(b + \frac{\Delta S_n}{2} \right)^2 \right] - 0,5 \left[R_2^2 \ln R_2^2 - \left(b - \frac{\Delta S_n}{2} \right)^2 \right].$$

Если $R_1^2 < \varepsilon$ или $R_2^2 < \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-8}$), то выражения для E_1 и E_2 имеют предельные значения:

$$E_1 = 2 \Delta S_n [\ln \Delta S_n - 1],$$

$$E_2 = \frac{\Delta S_n^2}{2} [2 \ln \Delta S_n - 1].$$

Таким образом, значение интеграла (9) определится суммой:

$$J(\theta) = \sum_{n=1}^{MN} \Delta J_n(\theta_n, y_n, y_{n+1}).$$

По описанной методике были найдены контуры ряда профилей, для которых известны распределения скоростей. В таблице приведены значения y_B, y_H для профиля В-12, найденные путем интерполяции, и y_B^p, y_H^p — по предложенной методике. Угол атаки $\alpha = 6,039^\circ$, вычисленное значение $\alpha = 6,08^\circ$.

Значения \bar{V}_B, \bar{V}_H , необходимые для решения обратной задачи, были получены путем решения прямой задачи. Шаг интегрирования $h = 2\pi/80$, число сохраненных членов ряда — 8. Как видно из таблицы, результаты расчета (y_B^p, y_H^p) близки к искомым значениям (y_B, y_H).

Л и т е р а т у р а

1. Симонов Л.А. Расчет обтекания крыловых профилей и построение профиля по данному распределению скоростей у его поверхности. — Труды ЦАГИ, вып. 576, 1945.
2. Шурыгин В.М. Определение контура профиля по заданному распределению давлений. — Труды ЦАГИ, вып. 660, 1948.
3. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи. — Ученые записки Казанского государственного университета. Т. II5, кн.6, 1955.

Расчетные значения координат профиля В-12

x	\bar{V}_B	\bar{V}_H	y_B^p	y_H^p	y_B	y_H
0,0000	1,548	1,548	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0039	1,782	0,312	0,0091	-0,0078	0,0087	-0,0073
0,0351	1,580	-0,568	0,0305	-0,0203	0,0302	-0,0209
0,0955	1,533	-0,774	0,0527	-0,0300	0,0525	-0,0303
0,1813	1,492	-0,859	0,0704	-0,0364	0,0703	-0,0363
0,2871	1,426	-0,907	0,0793	-0,0397	0,0790	-0,0394
0,4063	1,333	-0,939	0,0773	-0,0408	0,0773	-0,0407
0,5314	1,235	-0,966	0,0665	-0,0397	0,0665	-0,0398
0,6545	1,147	-0,990	0,0510	-0,0363	0,0508	-0,0364
0,7679	1,070	-1,002	0,0343	-0,0298	0,0342	-0,0300
0,8645	1,003	-0,990	0,0197	-0,0205	0,0199	-0,0212
0,9382	0,942	-0,953	0,0089	-0,0108	0,0090	-0,0115
0,9843	0,901	-0,907	0,0023	-0,0031	0,0022	-0,0037
1,0000	0,900	-0,900	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000

- Шагаев А.А. Построение контура профиля по заданному распределению давлений в сжимаемом потоке газа. - Труды ЦАГИ, вып. 1925, 1978.
- Нугманов З.Х. Математическое описание поверхности произвольного крыла. - В сб.: Вопросы проектирования летательных аппаратов. - Казань: КИАИ, 1979.
- Павловец Г.А. Методы расчета обтекания сечений крыла идеальным несжимаемым потоком. - Труды ЦАГИ, вып. 1344, 1971.
- Павловец Г.А., Самознаев Н.Д. Численный метод построения контура крылового профиля по заданному распределению скоростей на его поверхности. - Труды ЦАГИ, вып. 1271, 1970.
- Самознаев Н.Д. Построение контура профиля по заданному распределению скорости или давления на его поверхности вблизи земли. - Труды ЦАГИ, вып. 1463, 1973.

9. Самознаев Н.Д. Построение решетки профилей по заданному распределению скоростей на его поверхности. - Труды ЦАГИ, вып. 1452, 1973.
10. Пешатов Г.Д., Новоселов Ю.Н. Применение метода случайного поиска для решения обратной задачи аэродинамики. - Авиационная техника, 1978, №2.
11. Mangler w. Die Bezeichnung eines Tragflügelprofils mit vorgeschubener Druckverteilung. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, 1938.
12. Kennedy J.L., Mazsden D.J. A Potential Flow Design Method for Multicomponent Airfoil Sections. - J. Aircraft. vol. 15, 1978.
13. Kennedy J.L. Mazsden D.J. The development of high lift singlecomponent airfoil sections. - Aeronautical Quarterly, v.30, N1, 1979.
14. Liebeck P.H. On the design of subsonic aerofoils for high lift. - AIAA Paper, 1976, N406.

УДК 533.6.11

А.И.Гамануха, В.И.Холявко

НЕСУЩИЕ СВОЙСТВА ЖЕСТКОГО ДВУХДОЛЬНОГО КРЫЛА ТИПА "ПАРАПЛАНА"

Теория тонкого тела применяется для исследования подъемной силы неплоского треугольного крыла, поперечное сечение которого образовано двумя дугами окружностей. Аналогичные формы наблюдаются на "парапланах", имеющих гибкие несущие поверхности. Результаты настоящих исследований могут быть распространены на жесткие конфигурации.

Исследуемое крыло и его сечение показано на рис. 1. Считаем, что α и удлинение крыла в плане λ малы: $\alpha \ll 1$, $\lambda < 1$.

Этот атаки определяем в плоскости симметрии крыла относительно хордовой хорды. Следуя теории тонкого тела, запишем коэффициент подъемной силы крыла [1] :