и числе $D_z = 1$ эквивалентна задаче минимизации трения.

В заключение отметим, что обнаруженное выше расхождение объясняется использованием следствия из первого интеграла (9) и различием в способах алгоритмизации вариационной задачи.

Литература

1. Гараев К.Г. Об одном следствии из теоремы Э. Нётер для двухмерной вариационной задачи типа Майера. - Прикладная математика и механика, 1980, т. 44, № 3.
2. Гараев К.Г. К задаче оптимального управления трением в ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости. - Известия вузов. Авиационная техника, 1981, № 2.
3. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. - Прикладная механика и техн. физика, 1960, № 3.
4. Лю-Шэнь-Цюань. Расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при наличии отсоса или вдува. - ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 4.
5. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1977.
6. Крайко А.Н. К оптимальному управлению пограничным слоем. - Известия вузов.- Авиационная техника, 1972, № 2.

УДК 532.517 (2+4)

В.Г. Шахов

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕХОДА ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

До настоящего времени отсутствует общий метод расчета координаты перехода ламинарного течения в турбулентное. Наиболее строгий метод исследования устойчивости течения с помощью линейных или нелинейных уравнений типа Орра-Зоммерфельда требует привлечения экспериментальных данных для определения координаты смены режима течения. Поэтому при включении в численные методы различных режимов движения используют различные упрощенные подходы к определению границ режимов. Обзор таких подходов содержится в работе [1] , где автором предложен прос-

...ый локальный способ определения координаты точки перехода ламинарного течения в турбулентное, который является обобщением результатов Л.Г.Лойцянского и Х.Рауза.

Критерий перехода, предложенный в работе [I], не имеет строгого обоснования, но в разнообразных течениях для внутренней задачи и в пограничном слое (плоском и пространственном) его величина оказалась примерно постоянной. Применимость этого метода демонстрируется ниже на ряде примеров течений типа пограничного слоя.

В точке перехода ламинарного течения в турбулентное должно выполняться условие [I]

$$\lambda = \left(\frac{L^2 J}{\nu}\right)_{max} = 125, \tag{I}$$

где L - "геометрический" масштаб турбулентности;

$J^2 = e_{ij} e^{ij}$ - инвариант тензора скоростей деформаций;

e_{ij}, e^{ij} - ковариантные и контрвариантные составляющие тензора скоростей деформаций [2];

ν - кинематическая вязкость жидкости.

Величину L можно определять по формуле, предложенной Н.И.Булеевым [3]

$$L^{-1} = \int_0^{2\pi} S^{-1} d\varphi, \tag{2}$$

в которой S - расстояние от рассматриваемой точки до твердой стенки в направлении угла φ. Если рассматривается внешнее течение (пограничный слой, струя, след) или пристенная область, то необходимо ввести множители, учитывающие эффект перемежаемости во внешней зоне и влияние стенки [4].

Течение Фокнера-Скан. Используем критерий (I) для оценки условий перехода ламинарного течения типа пограничного слоя в турбулентное. Первым рассмотрим автомодельное течение Фокнера-Скан, которое отвечает степенному распределению скорости вне пограничного слоя

$$U = ax^n. \tag{3}$$

Здесь x - продольная координата;

a и n - постоянные.

"Геометрический" масштаб турбулентности L для течения в пограничном слое на плоской стенке, вычисленный по формуле (2), оказывается равным расстоянию до твердой стенки y. Выбирая формулу для коэффициента перемежаемости во внешней части пограничного слоя в виде экспоненциальной функции расстояния до стенки [4], окончательно имеем:

$$L = y\exp\left(-\frac{y}{m\delta}\right), \qquad (4)$$

где δ – толщина пограничного слоя (за таковую будем принимать величину y, при которой продольная скорость потока в пограничном слое u равняется 0,995 U);

m – постоянная.

В дальнейшем будем считать, что m = 0,6 [4].

В приближении пограничного слоя для плоского случая

$$I = \partial u / \partial y. \qquad (5)$$

Для течения Фокнера-Скан известно [5], что

$$u = U(x)\Phi'(\xi),\ \xi = y\sqrt{\frac{U'}{\nu\beta}},\ U' = \frac{dU}{dy},\ \beta = \frac{2n}{n+1}. \qquad (6)$$

Тогда из выражений (I) и (4) – (6) после преобразований имеем:

$$\chi = \sqrt{(2-\beta)Re_{пер}}\left[\xi^2\exp\left(-\frac{2\xi}{m\xi_\infty}\right)\right]_{max} = 125; \qquad (7)$$

$$Re = \frac{Ux}{\nu};\ \xi_\infty = \delta\sqrt{\frac{U'}{\nu\beta}}.$$

Здесь безразмерная толщина пограничного слоя ξ_∞ находится из условия $\xi = \xi_\infty$ при Φ' = 0,995; $Re_{пер}$ – пареходное число Рейнольдса.

Составляя отношение $\chi = const$ для градиентного ($\beta \neq 0$) и безградиентного ($\beta = 0$) течения, из (7) получим:

$$\frac{Re_{пер}}{Re_{0пер}} = \frac{2\left[\xi^2\exp\left(-\frac{2\xi}{m\xi_\infty}\right)\Phi''\right]^2_{0max}}{(2-\beta)\left[\xi^2\exp\left(-\frac{2\xi}{m\xi_\infty}\right)\Phi''\right]^2_{max}}, \qquad (8)$$

где индекс 0 относится к безградиентному течению (β = 0) на плоской пластине.

Для расчетов использовалась таблица из работы [5]. При этом величина Φ'' находилась численным дифференцированием приведенной в указанной таблице величины Φ' с использованием центральных разностей.

Результаты расчетов по формуле (8) приведены на рисунке. Для $\beta = 0$ из (7) следует, что $Re_{0пер}$ = I,98$\cdot$10^5, что близко к экспериментальному результату. Из рисунка видно, что при $\beta > 1$ резко возрастает величина $Re_{пер}$, а при $\beta = 2$, как это следует из формулы (8), величина $Re_{пер}$ становится бесконечно большой. Этот диапазон $\beta > 1$ Л.Г.Лойцянский характеризует как "особо резко ускоряющийся поток (например, в конфузорных каналах)" [5], где возрастает устойчивость ламинарного течения и где возможна даже реламинаризации турбулентного режима [6] .

Если использовать один из локальных критериев реламинаризации [7]

$$\Lambda_p = \frac{\nu U U'}{v_*^3} > 0{,}02,$$

который с помощью соотношений (3) и (6) запишется как

$$\Lambda_p = \frac{\beta}{[(2-\beta)Re_{пер}]^{1/4}}\left[\Phi''(0)\right]^{-3/2} > 0{,}02, \qquad (9)$$

то из совместного решения (7) и (9) следует, что реламинаризация должна наступать при $\beta \geq 0{,}7$, т.е. в области "особо резко ускоряющегося" течения. На рисунке эта граница отмечена вертикальной чертой.

Струйные течения. В струйных течениях "геометрический" масштаб турбулентности считается постоянным поперек сечения и равным ширине струи. Во внешней части струйного течения этот масштаб должен убывать за счет перемежаемости потока. Однако приведенные ниже результаты показывают, что для затопленных струй условие (I) выполняется по внутренней области, где перемежаемость отсутствует. Поэтому в расчетах будем считать, что коэффициент перемежаемости равен единице, а "геометрический" масштаб турбулентности равен местной ширине струи.

Для круглой струи имеем [8]

$$u = \frac{2\alpha^2}{x}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{16}\,\frac{J_0}{\pi\mu}}, \quad \eta = \frac{r}{x\sqrt{\nu}}, \qquad (10)$$

где J_0 – импульс струи;

r – радиальная координата;

μ – динамическая вязкость ($\mu = \nu\rho$).

Для данного течения

$$\Gamma = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad L = \delta. \qquad (11)$$

Здесь и далее под толщиной струи δ подразумевается такое значение поперечной координаты, при которой $u/u_m = 0{,}01$ (u_m – – максимальное значение скорости в рассматриваемом сечении, имеет место на оси струи). Тогда из (10) находим, что

$$\delta = \frac{6}{\alpha}\,x\sqrt{\nu}. \qquad (12)$$

Подставляя (10) – (12) в (I) и преобразовывая, получим:

$$\chi = 18\sqrt{\frac{3}{\pi}\,\frac{J_{0пер}}{\rho\nu^2}}\left[\frac{\alpha\eta}{\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^3}\right]_{max} = 125. \qquad (13)$$

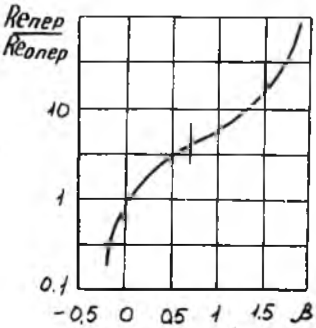

Рис. Влияние градиента давления на переходное число Рейнольдса

Так как максимальное значение величины в квадратных скобках в (13) имеет место при $\alpha\eta = 2/\sqrt{5}$, то из (13) следует, что

$$x = \frac{25}{6}\sqrt{\frac{15}{\pi}\,\frac{J_{0пер}}{\rho\nu^2}} = 125,$$

откуда условие перехода для круглой струи оказывается равным

$$\frac{J_{0пер}}{\rho\nu^2} = 60\pi \approx 188.5. \qquad (14)$$

В случае плоской затопленной ламинарной струи профиль скорости описывается следующей формулой [8] :

$$u = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3J_0^2}{4\rho^2\nu x}}\,ch^{-2}\xi, \quad где \quad \xi = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{J_0}{6\rho\nu^2 x^2}}\,y. \qquad (15)$$

Учитывая, что для плоской затопленной ламинарной струи

$$I = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad L = \delta \approx 6\sqrt[3]{\frac{6\rho\nu^2 x^2}{J_0}},$$

из выражений (1) и (15) получаем:

$$x = 54\sqrt[3]{\frac{1}{6}\,\frac{J_0\,x_{пер}}{\rho\nu^2}}\left(\frac{sh\,\xi}{ch^3\xi}\right)_{max} = 125. \qquad (16)$$

Используя тот факт, что максимальное значение величины в скобках этой формулы имеет место при $\xi = arth\frac{1}{\sqrt{3}}$, соотношение (16) можно переписать в следующем виде:

$$x = 12\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\frac{1}{6}\,\frac{J_0\,x_{пер}}{\rho\nu^2}} = 125.$$

Отсюда находим условие перехода ламинарного режима течения в турбулентный для плоской затопленной струи:

$$\frac{J_0\,x_{пер}}{\rho\nu^2} = 6\left(\frac{125}{12\sqrt{3}}\right)^3 \approx 1305. \qquad (17)$$

Наконец, в случае радиально-щелевой затопленной ламинарной струи имеем [8] :

$$u = \frac{\alpha_1^2}{2x}\,ch^{-2}\xi_1, \quad где \quad \alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{3J_0}{4\pi\rho\sqrt{\nu}}}, \quad \xi_1 = \frac{\alpha_1 y}{2x\sqrt{\nu}}. \qquad (18)$$

Для этого типа течения

$$I = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad L = \delta \approx \frac{6}{\alpha_1}\,x\sqrt{\nu}.$$

Тогда из (I) и (I8) следует, что

$$x = 18\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\,\frac{J_{0\,пер}}{\rho\nu^2}}\left(\frac{sh\,\varphi_1}{ch^3\varphi_1}\right)_{max} = 125. \tag{I9}$$

Как и для случая плоской ламинарной затопленной струи, максимальное значение величины в скобках соотношения (I9) достигается при $\varphi_1 = arth\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому соотношение (I9) эквивалентно следующему:

$$x = 4\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\,\frac{J_{0\,пер}}{\rho\nu^2}} = 125.$$

Следовательно, условие перехода ламинарного режима течения в турбулентный для радиально-щелевой затопленной струи представляется в виде

$$\frac{J_{0\,пер}}{\rho\nu^2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{125}{4\sqrt{3}}\right)^3 \approx 24601. \tag{20}$$

К сожалению, имеется очень мало экспериментальных исследований, посвященных определению переходных режимов в струйных течениях. Обычно струйное течение характеризуют числом Рейнольдса, подсчитанным по характерному размеру сопла, из которого вытекает струя, и скорости течения, предполагаемой постоянной на срезе сопла. Тогда для струи, истекающей из круглого сопла диаметра d с постоянной скоростью u_0, имеем

$$Re = \frac{u_0 d}{\nu} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\,\frac{J_0}{\rho\nu^2}}.$$

И вместо условия (I4) получаем для круглой струи следующее условие перехода:

$$Re_{пер} = 4\sqrt{15} \simeq 15{,}5. \tag{2I}$$

Если плоская струя истекает из сопла шириной h с постоянной скоростью u_0, то соответствующее число Рейнольдса выражается через J_0 соотношением

$$Re = \frac{u_0 h}{\nu} = \sqrt{\frac{J_0 h}{\rho\nu^2}},$$

а условие (I7) для перехода плоской ламинарной затопленной струи запишется как

$$Re_{пер} = \sqrt{\frac{6}{x_{пер}/h}\left(\frac{125}{12\sqrt{3}}\right)^3} \approx \frac{36}{\sqrt{x_{пер}/h}}. \tag{22}$$

Из опытов известно, что для плоской струи [9]

$x_{пер}/h \approx 12$.

Тогда из условия (22) получаем

$$Re_{пер} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{125}{12\sqrt{3}}\right)^3} \approx 10{,}5. \quad (23)$$

Полученные условия (21) и (23) подтверждаются экспериментальными наблюдениями о том, что свободные ламинарные струйные течения очень неустойчивы и при малых числах Рейнольдса переходят в турбулентные.

Для затопленной ламинарной радиально-щелевой струи, истекающей с постоянной скоростью u_0 из сопла высотой h и радиуса x_0, необходимая связь между числом Рейнольдса и J_0 имеет вид

$$Re = \frac{u_0 h}{\nu} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{h}{x_0}\frac{J_0}{\rho\nu^2}}$$

и из (20) получаем

$$Re_{пер} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{125}{4\sqrt{3}}\right)^3\frac{h}{x_0}} \approx 62{,}6\sqrt{\frac{h}{x_0}}. \quad (24)$$

Полное отсутствие экспериментальных исследований перехода течения в радиально-щелевой струе не позволяет проверить правильность полученного условия (24), что $Re_{пер}$ зависит от геометрии сопла (характеризуемой отношением x_0/h). Однако так как через преобразования Степанова-Манглера существует однозначное соответствие между характеристиками течения в плоской и радиально-щелевой струе [10], то результат (24) находится в соответствии с (23).

Таким образом, приближенный феноменологический критерий перехода ламинарного течения в турбулентное (1) позволяет определить условия перехода несжимаемых течений в градиентном пограничном слое и затопленных струй различной геометрии.

Литература

1. Шахов В.Г. О критерии устойчивости ламинарного течения. – В сб.: Гидрогазодинамика. – Куйбышев: КуАИ, 1977, вып. 4.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т. 1. – М.: Наука, 1976.
3. Булеев Н.И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. – Теплопередача. – М.: АН СССР, 1968.
4. Шахов В.Г. О длине пути перемешивания в турбулентном потоке. –

В сб.: Аэродинамика, динамика полета и системы управления. – Куйбышев: КуАИ, 1972.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.
6. Назарчук М.М., Ковецкая М.М., Панченко В.Н. Обратный переход турбулентного течения в ламинарное. – Киев: Наукова думка, 1974.
7. Методы расчета турбулентного пограничного слоя / Гиневский А.С. Иоселевич В.А., Колесников А.В. и др. – Механика жидкости и газа. – М.: ВИНИТИ, 1978, т. 11.
8. Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. – М.: Наука, 1965.
9. Hrucak P., Levy M.J. Critical Reynolds number estimates by thermo-dynamic (stochastic) methods. Trans. ASME, 1974, N3.
10. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. – М.: Машиностроение, 1969.

УДК 532.517.4.

В.М. Головин

КРИТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА И СОПРОТИВЛЕНИЕ ГЛАДКИХ ТРУБ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ

Условные обозначения

U – осредненная по времени скорость жидкости;
U_0 – максимальная скорость на оси;
W – средняя по объемному расходу скорость;
$q = W/u_0$ – удельный расход;
ρ, μ – плотность и вязкость жидкости;
ν – кинематическая вязкость;
μ_t – турбулентная вязкость;
$m = \mu_t/\mu$ – безразмерная турбулентная вязкость;
τ_w – касательное напряжение на стенке;
$V_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – динамическая скорость;
r_0 – радиус трубы;
d – диаметр;
r – текущий радиус;
y – расстояние от стенки;
$\xi = r/r_0$ – безразмерное расстояние от оси;