нения с расположенным вблизи него телом вращения.- Ученые записки ЦАГИ, 1977, т.8, № 3.
5. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. - М.:Машиностроение, 1969.
6. Штейнберг Р.И. Интерференция корпуса и крыла со сверхзвуковой кромкой. - Труды ЦАГИ, 1967, вып. 1035.
7. Flax A.H. Integral relations in the linearized theory of wing-body interference. - J. aeron. Sci., 1953, vol. 20, №7.

УДК 532.526.7:517.972

К.Г.Гараев, В.В.Соловьев

ОБ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ АЭРОДИНАМИКИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В работе дается новый подход к задаче минимизации трения в ламинарном пограничном слое, основанный на результатах работ [1] - [4]. Так же, как и в работе [2], решение вариационной задачи сводится к интегрированию уравнений Прандтля с приведенными краевыми условиями, однако эти условия получены здесь в форме, более удобной для численной реализации на ЭВМ.

Уравнения ламинарного пограничного слоя возьмем в виде [3]:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\dot{U}_e}{U_e}(1-\bar{u}^2) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0.$$

Граничные условия

$$\bar{u} = 0,\ w = w_0(\xi) \quad \text{при } \eta = 0, \qquad (2)$$
$$\bar{u} \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty.$$

Здесь $w = \bar{v} + \frac{\dot{U}_e}{U_e}\eta u$, $\bar{v} = \frac{v}{U_e\sqrt{\nu}}$;

$$w_0 = \frac{v_0}{U_e\sqrt{\nu}},\ \bar{u} = \frac{u}{U_e};\ \xi = \int_0^x U_e\,dx,\ \eta = \frac{U_e y}{\sqrt{\nu}};$$

u, v - соответственно продольная и поперечная компоненты скорости;
$u_e(x)$ - скорость на внешней границе пограничного слоя;

ν – кинематический коэффициент вязкости; индекс "о" относится к параметрам потока на стенке, индекс "е" – на внешней границе пограничного слоя.

Мощность системы управления оценим функционалом

$$N=\int_0^L a\, v_0^2(x)\,dx \qquad \text{или в новых переменных: } \bar{N}=\int_0^{\bar{L}} u_e(\xi) W_0^2(\xi)\,d\xi,$$

$$\text{где } \bar{N}=\frac{N}{a\nu};\quad \bar{L}=\int_0^L U_e(x)\,dx. \tag{3}$$

Сила сопротивления трения симметричного профиля, обтекаемого несжимаемой жидкостью под нулевым углом атаки:

$$X=2\mu\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}dx\ , \qquad \text{или}$$

$$\bar{X}=X\frac{\sqrt{\nu}}{2\mu}=\int_0^{\bar{L}} U_e\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}d\xi. \tag{4}$$

Ставится следующая вариационная задача. Среди непрерывных управлений $w_0(\xi)$ требуется найти такое, которое доставляет минимальное значение функционалу (4) при заданной мощности системы управления (3) и связях (I), (2).

Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\bar{u}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}(\lambda_1 w)-2\lambda_1\bar{u}\frac{U_e'}{U_e}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\eta^2}=0, \tag{5}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\eta}=0.$$

Краевые условия:

$$\lambda_1=-U_e(\xi) \qquad \text{при} \quad \eta=0$$

$$\lambda_1\to 0,\ \lambda_2\to 0 \qquad \text{при} \quad \eta\to\infty \tag{6}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0 \qquad \text{при} \quad \xi=\bar{L}.$$

Оптимальное управление определяется по формуле

$$w_0(\xi)=\alpha\frac{\lambda_2(\xi,0)}{u_e(\xi)}. \tag{7}$$

Тогда $V_0(x)=U_e\sqrt{\nu}\,w_0$. В формулах (5) – (7) $\lambda_1(\xi,\eta)$, $\lambda_2(\xi,\eta)$, α – множители Лагранжа.

Из второго уравнения (5) в силу второго условия из (6) имеем

$$\lambda_2(\xi,0) = -\int_0^1 \lambda_1 d\bar{u} .$$

Тогда, рассматривая первое уравнение из (5) при $\eta=0$, получим:

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \lambda_1 d\bar{u} = \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \eta^2} + u\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} . \tag{8}$$

Равенство (8) будем называть основным интегральным соотношением теории оптимально управляемого пограничного слоя несжимаемой жидкости. Оно удобней аналогичного соотношения, полученного в [2], так как интегрирование ведется в конечных пределах.

Согласно [I] данная вариационная задача допускает первый интеграл

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} + \bar{u}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi} - \lambda_1\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\dot{U}_e}{U_e}(1-\bar{u}^2)\right] = 0,$$

откуда при $\eta=0$ получаем

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \dot{U}_e \Big/ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} . \tag{9}$$

Для построения оптимального управления множитель Лагранжа $\lambda_1(\xi,\eta)$ зададим в виде

$$\lambda_1(\xi,\eta) = \left[a_0(\xi) + a_1(\xi)\bar{u} + a_2(\xi)\bar{u}^2\right] exp\left[-\bar{u}^2/S^2(\xi)\right]. \tag{I0}$$

Удовлетворяя краевым условиям

$$\lambda_1(\xi,0) = -U_e, \; \lambda_1(\xi,1) = 0, \; (\partial\lambda_1/\partial\eta)_{\eta=0} = \dot{U}_e/C_0,$$

где $C_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$, получим:

$$a_0 = -U_e, \; a_1 = \dot{U}_e/C_0^2, \; a_2 = U_e - \dot{U}_e/C_0^2 . \tag{II}$$

В (I0) $S(\xi)$ неизвестная пока функция, такая, что $S(\bar{L}) = 0$. С учетом (I0) и (II) интегральное соотношение (8) после преобразований примет вид

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{f(\xi,S)}{\varphi(\xi,S)}, \tag{I2}$$

где

$$f(\xi,S)=2c_0^2\left(1+\frac{1}{S^2}\right)U_e+\left(\frac{w_0}{c_0}-2\right)\dot{U}_e-\frac{1}{c_0^2}\frac{\dot{U}_e^2}{U_e}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi\left(\frac{1}{S}\right)\Big[\dot{U}_e\Big(\frac{S^2}{2}-S\Big)-\ddot{U}_e\frac{S^3}{2c_0^2}\Big]-\frac{S^2}{2}\left[\frac{\ddot{U}_e}{c_0^2}-\frac{2\dot{U}_e}{c_0^3}\dot{c}_0-\dot{U}_e e^{-1/S^2}\right]+w_0\frac{\dot{U}_e}{U_e};$$

$$\varphi(\xi,S)=e^{-1/S^2}\left(-\frac{3}{2}SU_e+\frac{S}{2c_0^2}\dot{U}_e\right)+\frac{S}{c_0^2}\dot{U}_e+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi\left(\frac{1}{S}\right)\Big[U_e\Big(\frac{3S^2}{2}-1\Big)-\frac{3S^2}{2c_0^2}\dot{U}_e\Big];$$

$$\Phi\left(\frac{1}{S}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/S}e^{-t^2}dt.$$

Следует подчеркнуть, что уравнение (I2) в отличие от аналогичного уравнения, полученного в работе [2], не содержит в правой части бесконечных рядов, что значительно облегчает проблему поиска оптимального управления. Отметим далее, что уравнение (I2) имеет особенность в точке $\xi=\bar{L}$. Однако легко показать, что в левой полуокрестности этой точки данное уравнение эквивалентно уравнению $\frac{dS}{d\xi}=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{c_0^2}{S^2}$, которое можно использовать для "выхода" из особой точки при любых $V_0(\xi)$ и $U_e(\xi)$ (предполагается, что $U_e(\bar{L}), \dot{U}_e(\bar{L}), \ddot{U}_e(\bar{L})$ - конечны).

Для расчета трения при произвольных законах вдува используем уравнения третьего приближения, полученные в работе [4]:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_0 &= 72w_0-\frac{\dot{U}_e}{U_e}\left(\frac{67}{2}\theta_0+40\theta_1-\frac{7}{2}\theta_2\right)+\frac{225}{\theta_0}-\frac{234}{\theta_1}+\frac{9}{\theta_2};\\
\dot{\theta}_1 &= 18w_0-\frac{\dot{U}_e}{U_e}\left(\frac{67}{2}\theta_0+\frac{28}{3}\theta_1+\frac{13}{12}\theta_2\right)+\frac{39}{\theta_0}-\frac{51}{2}\frac{1}{\theta_1}-\frac{12}{\theta_2}\\
\dot{\theta}_2 &= -24w_0-\frac{\dot{U}_e}{U_e}\left(-\frac{83}{6}\theta_0-\frac{52}{3}\theta_1+\frac{51}{2}\theta_2\right)-\frac{99}{\theta_0}+\\
&+\frac{120}{\theta_1}-\frac{15}{\theta_2}.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Вдув осуществляется, начиная с точки ξ_0. Начальные условия к системе (I3):

$$\theta_i(\xi_0)=A_i\sqrt{\xi_0} \quad (i=1,2,3), \qquad (14)$$

где коэффициенты A_i находятся из соответствующей алгебраической системы [3] : $\theta_0(\xi)=1/C_0(\xi)$.

Схема решения оптимальной задачи такова:

1) задается оптимальная скорость вдува w_0^0 в нулевом приближении и интегрируется система (13) с начальными условиями (14);

2) интегрируется уравнение (12) и находится

$$\lambda_2(\xi,0)=-\int_0^1\lambda_1 d\bar{u}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi\left(\frac{1}{S}\right)\left[\dot{U}_e\frac{S^3}{2C_0^2}-U_e\left(\frac{S^3}{2}-S\right)\right]+$$

$$+\frac{S^2}{2}\left(U_e e^{-1/S^2}-\frac{\dot{U}_e}{C_0^2}\right);$$

3) находится оптимальная скорость вдува в первом приближении

$$w_0^{(1)}=\alpha g(\xi),\quad где\quad g(\xi)=\lambda_2(\xi,0)/U_e(\xi),$$

$$\alpha=\left(\bar{N}\Big/\int_{\xi_0}^{L}U_e g^2 d\xi\right)^{1/2};$$

4) снова интегрируется система (13) для $w_0^{(1)}(\xi)$, находится $\lambda_2(\xi,0)$ и $w_0^{(2)}(\xi)$ и т.д.

Вычислительный процесс заканчивается при установлении практической сходимости функционала.

Пример. Рассматривается продольное обтекание пластины с исходными данными, взятыми для сравнения из работы [5] :

$$L=0{,}1\,м,\qquad N/a=5{,}33\cdot10^{-4}\,м^3/с^2,$$

$$U_e=80\,м/с,\quad \nu=15{,}7\cdot10^{-6}\,м^2/с.$$

Уравнения (12), (13) интегрировались методом Рунге-Кутта;

x_0 = 0,001 м.

Установлена быстрая сходимость функционала к своему предельному значению – на второй итерации. Оптимальная скорость вдува обеспечивает снижение сопротивления пластины примерно на 17% по сравнению с постоянной скоростью вдува при одной и той же мощности системы управления.

В работе [5] при этих же исходных данных оптимальное управление по сравнению с равномерным вдувом дает выигрыш порядка 8%. Такое сравнение допустимо, так как согласно работе [6] задача оптимизации теплообмена при допущении постоянства температуры стенки и числе $D_z = 1$ эквивалентна задаче минимизации трения.

В заключение отметим, что обнаруженное выше расхождение объясняется использованием следствия из первого интеграла (9) и различием в способах алгоритмизации вариационной задачи.

Литература

1. Гараев К.Г. Об одном следствии из теоремы Э. Нётер для двухмерной вариационной задачи типа Майера. - Прикладная математика и механика, 1980, т. 44, № 3.
2. Гараев К.Г. К задаче оптимального управления трением в ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости. - Известия вузов. Авиационная техника, 1981, № 2.
3. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. - Прикладная механика и техн. физика, 1960, № 3.
4. Лю-Шэнь-Цюань. Расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при наличии отсоса или вдува. - ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 4.
5. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1977.
6. Крайко А.Н. К оптимальному управлению пограничным слоем. - Известия вузов.- Авиационная техника, 1972, № 2.

УДК 532.517 (2+4)

В.Г. Шахов

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕХОДА ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

До настоящего времени отсутствует общий метод расчета координаты перехода ламинарного течения в турбулентное. Наиболее строгий метод исследования устойчивости течения с помощью линейных или нелинейных уравнений типа Орра-Зоммерфельда требует привлечения экспериментальных данных для определения координаты смены режима течения. Поэтому при включении в численные методы различных режимов движения используют различные упрощенные подходы к определению границ режимов. Обзор таких подходов содержится в работе [1] , где автором предложен прос-