

Л и т е р а т у р а

1. Л а м б Г. Гидродинамика. М.-Л., Гостехиздат, 1947.
2. Manton M.J., Mysak L.A., McEzgan R.E.  
*The diffraction of internal waves by a semi-infinite barrier*. *J. Fluid Mech.* 1970, v. 43, p.11
3. Н о б л Б., Метод Винера-Хопфа. М., И.-Л., 1962.

В.Ю.ОЛЬШАНСКИЙ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ  
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ОКОЛОЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

В работе [1] для решения прямой задачи околозвукового течения используется метод дифференцирования нелинейного уравнения по входящему в него параметру, впервые примененный в [2] при решении систем алгебраических нелинейных уравнений. В [1] при помощи метода двухмасштабных разложений строятся приближенные частные решения типа источника линейного уравнения (3). Решение задачи, которая в [1] составлена неточно, представляется в виде суперпозиции частных решений, вследствие чего условие непроницаемости на профиле выполнено приближенно.

В настоящей работе устраняется указанный недостаток: для околозвукового обтекания тонкого симметричного профиля проведены расчеты в случаях, когда  $M < 1$  и  $M > 1$ .

1. Рассмотрим околозвуковое обтекание тонкого симметричного профиля однородным потоком идеального газа со скоростью  $U_\infty$  под нулевым углом атаки. Потенциал возмущений скорости  $\varphi$  в первом приближении подчиняется нелинейному уравнению Кармана-Фальковича

$$(1 - M^2) \varphi_{xx} + \varphi_{\varphi\varphi} = 0; \quad (1)$$

$$U = U_\infty (1 + \varphi_x); \quad 1 - M^2 = 1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_x,$$

где  $M$  - местное число Маха;  $\gamma$  - отношение удельных теплоемкостей; ось  $x$  направлена по потоку;  $U$  - проекция скорости на ось  $x$ .

Условие непротекания для профиля малой относительной толщи-

III  $\tau$  с контуром  $y = \pm \tau F(x)$  имеет вид

$$g_y(x, \pm 0) = \pm \tau F'(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Дифференцирование (1), (2) по  $x$  и параметру  $\tau$  приводит к задаче:

$$[(1-M^2)g]_{xx} + g_{yy} = 0, \quad (3)$$

$$g_y(x, \pm 0) = \pm F''(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$g = g_{x\tau} = u_\tau. \quad (5)$$

В околозвуковом диапазоне скоростей при расстояниях  $y$  от профиля порядка единицы получим равенство

$$1 - M^2(x, y) = \beta(x) + O(\tau), \quad \beta(x) = 1 - M^2(x, 0) = O(\tau^{2/3}).$$

Приближенные частные решения уравнения (3) типа источника с центром в  $x = x_0, y = 0$  для  $x^2 + y^2 = O(1)$  в случае, когда  $M^2$  не меняет знака в поле течения, строятся в [1] при помощи метода двухмасштабных разложений [3]. Решение находят в виде асимптотического ряда:

$g_{ист}(x, y, \tau) = \varphi_0(x_s, x_m, y) + \varepsilon_1 \varphi_1(x_s, x_m, y) + \dots, \varepsilon_1 \ll 1,$   
где  $x_s, x_m$  - "быстрая" и "медленная" переменные;

$$x_m = x, \quad x_s = \int_{x_0}^x [\pm \beta(\eta)]^{-1/2} d\eta = O(|x - x_0| \tau^{-1/3}). \quad (6)$$

Знак + ( - ) используют в случае чисто дозвукового (сверхзвукового) течения.

При  $M < 1$  из формул (3), (6) для  $\varphi_0$  получается уравнение Лапласа по переменным  $x_s, y$ ; переменная  $x_m$  входит как параметр. Функция  $\varphi_1$  удовлетворяет уравнению Пуассона, правая часть которого зависит от  $\varphi_0$ . Требуя, чтобы члены  $O(x_s^{-2})$  в правой части уничтожались, так как они вызывают неограниченный рост  $\varphi_1$  при  $|x_s| \rightarrow \infty$ , получим зависимость  $\varphi_0$  от  $x_m$ . Приближенное решение (главный член  $\varphi_0$  в асимптотическом разложении  $g_{ист}$ ) имеет вид

$$g_{ист} = [\beta(x)]^{-3/4} \frac{x_s}{x_s^2 + y^2}, \quad M < 1.$$

В случае  $M > 1$  частные решения строятся аналогично

$$g_{ист} = [-\beta(x)]^{3/2} \delta(x_s - |y|), \quad M > 1, \quad (7)$$

где  $\delta$  - дельта - функция.

2. Решение краевой задачи (3), (4) представляется в виде

$$g(x, y) = \int_0^1 B(x_0) g_{ист} dx_0. \quad (8)$$

В случае  $M < 1$  из граничного условия (4) получим

$$B(x) = \frac{1}{\pi} [\beta(x)]^{-1/2} \int_0^x [\beta(\varphi)]^{1/4} F''(\varphi) d\varphi. \quad (9)$$

При  $\rho^2 = x^2 + (1 - M_\infty^2) y^2 \rightarrow \infty$  из равенств (8) и (9) следует  $g(x, y) = 0(x/\rho^2)$ .

Такой характер убывания делает отличным от нуля поток массы через контур, охватывающий профиль. Требуя, чтобы разложение  $g$  при удалении от профиля не содержало указанного медленно убывающего члена, получим уравнение для определения  $c$ :

$$\int B(x_0) dx_0 = 0. \quad (10)$$

Исключая  $c$  из выражений (9) и (10), получим

$$g(x, 0) = \frac{1}{\pi c} [\beta(x)]^{-3/4} \left\{ \frac{\int_0^x \int_0^x [\beta(\varphi)]^{1/4} F''(\varphi) d\varphi}{\int_0^x [\beta(x_0)]^{1/2} [\beta(\varphi)]^{-1/2} d\varphi} dx_0 - \frac{\int_0^x [\beta(x_0)]^{-1/2} \int_0^x [\beta(\varphi)]^{1/4} F''(\varphi) d\varphi dx_0}{\int_0^x [\beta(\varphi)]^{-1/2} d\varphi} \ln \left| \frac{\int_0^x [\beta(\varphi)]^{-1/2} d\varphi}{\int_0^x [\beta(\varphi)]^{-1/2} d\varphi} \right| \right\}. \quad (11)$$

В линейной теории тонкого профиля при  $\tau \rightarrow 0$   $M \rightarrow M_\infty$  и из (II) получаем известную формулу

$$\frac{du}{d\tau} = g = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - M_\infty^2}} \int_0^1 \frac{F'(x_0) dx_0}{x - x_0}, \quad u(x, 0) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - M_\infty^2}} \int_0^1 \frac{\tau F'(x_0) dx_0}{x - x_0}$$

Интересно, что, если в выражении (II) для  $g(x, 0)$  заменить вместо функции  $\beta$  ее значением в  $x$   $\beta(x)$  и проинтегрировать получившееся для  $u(\tau)$  обыкновенное дифференциальное уравнение, то результат совпадет с получаемым по методу локальной линеаризации [4]:

$$u(x, 0) = \frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} - \frac{1}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \left[ (1 - M_\infty^2)^{3/2} - \frac{\gamma}{2} (\gamma + 1) M_\infty^2 \int_0^1 \frac{\tau F'(x_0) dx_0}{\pi(x - x_0)} \right]^{2/3}$$

Отметим, что для построения в [I] решения

$$g_y(x, 0) = F''(x) + \frac{1}{4} F'(x) [\ln \beta(x)]'_x$$

При  $M > 1$  из (8) и (7) решение определяется формулой

$$g(x, y) = \left[ -\beta(x)^{3/4} B(s) [-\beta(s)]^{1/2} \right]_{s(x, y)}, \quad y = \int_0^x [-\beta(\varphi)]^{-1/2} d\varphi. \quad (12)$$

- в области между характеристиками  $s(x, |y|) = const$ , выходящими из носа ( $s = 0$ ) и хвоста ( $s = 1$ ) профиля. Вне этой области  $g(x, y) \equiv 0$ .

Функция  $B(x)$  определяется из граничного условия (4)

$$B(x) = - \left[ -\beta(x) \right]^{-1/2} \int_0^x [-\beta(\varphi)]^{1/4} F''(\varphi) d\varphi, \quad M > 1. \quad (13)$$

Постоянная  $c$  определяется аналогично случаю  $M < 1$  из (10).  
Исключая  $c$  из выражений (10), (13), получим из (12)

$$y(x, 0) = -[\beta(x)]^{-3/4} \left\{ \int_0^x [-\beta(\eta)]^{1/4} F'(\eta) d\eta - \frac{\int_0^1 [-\beta(\eta)]^{-1/2} \int_0^\eta [-\beta(\zeta)]^{1/4} F'(\zeta) d\zeta d\eta}{\int_0^1 [-\beta(\eta)]^{-1/2} d\eta} \right\} \quad (14)$$

При тех же допущениях, что и в случае  $M < 1$ , из (14) получаются формулы линейной теории и метода локальной линеаризации.

3. Для расчета скорости на профиле  $u(x, 0, \tau)$  следует численно проинтегрировать (11) или (14) по  $\tau$  [учитывая (5)] от начального значения  $\tau = 0, u = 0$ . В случае  $M > 1$  задача упрощается, дифференцируя (14) по  $x$ , найдем решение вида

$$M^2(x; y) - 1 = [H(\varphi)]^{7/7}, \quad \varphi = -\tau F'(x),$$

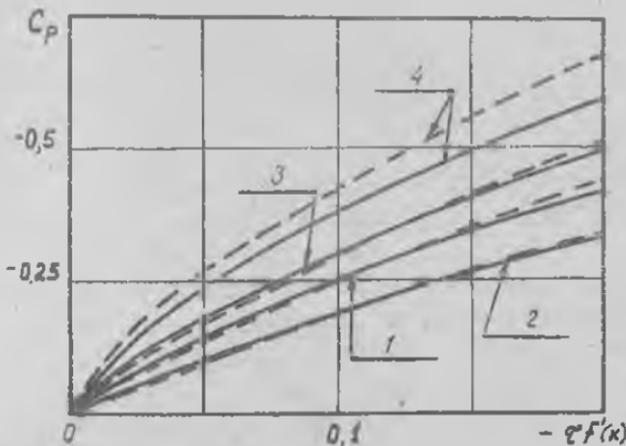
$$\varphi H'' + H' = \frac{7}{4}(\gamma + 1) M_\infty^2 H^{1/7}, \quad H(0) = (M_\infty^2 - 1)^{7/4} \quad (15)$$

При  $M_\infty > 1$  нетрудно численно найти решение задачи (15), аналитическое в  $\varphi = 0$ . При  $M_\infty = 1$  задача имеет точное решение:

$$u = (\gamma + 1)^{-1/3} \left[ -\frac{9}{7} \tau F'(x)^{2/3} = \left(\frac{6}{7}\right)^{2/3} u_{лл} \approx 0,902 u_{лл} \right],$$

где  $u_{лл}$  - скорость по методу локальной линеаризации.

Для  $M_\infty \geq 1$  зависимость коэффициента давления  $c_p = -2u$ , рассчитанного по (15), от наклона профиля приведена на рис.1 (сплошная)



Р и с.1. Эпюра распределения давления:  
1 -  $M_\infty = 1,2$ ; 2 -  $M_\infty = 1,4$ ; 3 -  $M_\infty = 1,1$ ;  
4 -  $M_\infty = 1$

линия) в сравнении с распределением по методу локальной линеаризации, совпадающим с [I] при  $M > 1$  (штриховая линия).

При докритическом обтекании проводилось численное интегрирование уравнения (II) по  $\tau$ . Для профиля  $F(x) = 2x(1-x)$ ,  $\tau = 0,1$  при  $M_\infty = 0,75$  в средней точке  $C_p = -0,463$  (по методу [I]  $C_p = -0,487$ , отличие 5%). Для профиля  $F(x) = 0,6 \cdot 0,42 x(1-x^5)$ ,  $\tau = 0,1$  при  $M_\infty = 0,7$  отличие между решением (II) и результатом по методу [I] достигает 4%.

Было отмечено, что решения, приведенные в данной работе, как и в работе [I], переходят в решения линеаризованной теории тонкого профиля при  $\tau \rightarrow 0$ . При интегрировании уравнения (II) по  $\tau$  от  $\tau = 0$  до заданной толщины значительная часть пути интегрирования лежит (при  $M \neq 1$ ) в области применимости линеаризованной теории, что приводит к умеренному расхождению в функциях  $C_p(x)$ , вычисленных по методу [I] и по предложенному способу. Указанное различие возрастает при  $M_\infty \rightarrow 1$  как для  $M < 1$ , так и для  $M > 1$ . Автор глубоко благодарен С.В. Фальконицу за внимание к работе и ценные замечания.

### Л и т е р а т у р а

1. Rubbert P.E., Landahl M.T., "AIAAJ." 1976, 9, №3, p. 470-479. Есть русск. пер. "Ракетная техника и космонавтика", 1967, т.5, №3, с. 104-117.
2. Д а в и д е н к о Д.Ф. Укр. матем. журнал, 1953, т.5, №2, с.196-206.
3. К о у л Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир: 1972.
4. Spreitzer J.R., Aleksne A.Y. NACA Rep. 1359, 1958.

В.Г. ШАХОВ

### УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В связи с созданием численных методов решения уравнений ламинарного пространственного пограничного слоя оказалось удобным пользоваться криволинейными системами координат, связанными с поверхностью тел произвольной формы [I], что требует вывода соответствующих уравнений. Литература, посвященная этому вопросу, достаточно обширна.