Здесь же нанесены результаты измерений.

На рис. 3 показано изменение скорости по сечениям исследованных струй, полученное в результате расчета по формуле (I5) (сплошная линия) и измерений (точки).

Литература

I. Бушмарин О.Н. Закрученная струя в спутном потоке жидкости той же плотности. Труды ЛШИ. Л., " Энергомашиностроение", I955.
2. Коробко В.И. Развитие ламинарной закрученной струи в спутном потоке той же жидкости. В межвуз. сб.: Аэродинамика.Изд-во Саратовского ун-та, I973 , вып. 2(5).
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., " Наука", I970.
4. Коробко В.И., Фалькович С.В. Развитие закрученной струи в безграничном пространстве. Изв. АН СССР, МЖГ, I969,3.

УДК 532. 517 (2+4)

В.Г. Шахов

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Очевидно, первым, кто дал критерий устойчивости ламинарного течения был О.Рейнольдс [I].Этот критерий впоследствие получил название критического числа Рейнольдса. Недостаток его заключается в том, что он зависит от большого количества факторов, и поэтому его необходимо каждый раз определять (например, экспериментально) заново. Поэтому более универсальным методом определения устойчивости ламинарного течения является метод малых возмущений, который приводит к решению (определению собственных функций и значений) уравнения Орра-Зоммерфельда [I] . Наряду с другими недостатками он обладает большими вычислительными трудностями. Поэтому для разработки численных методов решения задач движения вязкой жидкости из-за сравнительно малой области переходного течения предлагаются различные упрощенные методы. Отметим здесь Х. Рауза [2] , который в качестве критерия перехода

использовал формулировку числа Рейнольдса, предложенную Л.Г. Лойцянским в 1933 г. [3], [4]. Дальнейшее развитие этого подхода см. в [5]. А.Ю. Лукаш [6] за критерий устойчивости принимает отношение среднего касательного напряжения к средней кинетической энергии единицы объема жидкости. Методы термодинамики необратимых процессов для определения условий устойчивости ламинарного течения используются в [7]. Наконец, в [8] за критерий устойчивости принимают различные формулировки чисел Рейнольдса.

Ниже результаты [2] – [5], сформулированные для плоского движения, обобщаются на случай произвольного течения, предлагается одна из возможных физических интерпретаций этого критерия и приводятся результаты применения этого критерия к ряду течений.

Л.Г. Лойцянский [3] выдвинул предположение о том, что одним из характерных чисел Рейнольдса потока является

$$\chi = y^2 \frac{\partial u}{\partial y} / \nu, \qquad (1)$$

где u – продольная скорость;

y – расстояние от твердой стенки до рассматриваемой точки;

ν – кинематическая вязкость жидкости.

Х. Рауз [2], а за ним Ван Дрист и Блумер [5] считают, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в том случае, когда где-нибудь в потоке эта величина достигает критического значения $\chi_{кр}$, т.е. критерий устойчивости ламинарного течения записывается в виде

$$\chi_{кр} = \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y} / \nu \right)_{max}. \qquad (2)$$

Дадим возможное физическое толкование этого критерия. Максимальное значение величины χ достигается при условии обращения ее производной по y в нуль, т.е. в точке, где

$$y_* = \left(-2 \frac{\partial u}{\partial y} \Big/ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=y_*}. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (2), получим после преобразований

$$\chi_{кр} = \frac{4}{\varkappa^2} \left. \frac{\rho \varkappa^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 \Big/ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2}{\mu \frac{\partial u}{\partial y}} \right|_{y=y_*}, \qquad (4)$$

где $\varkappa$ – постоянная турбулентности Кармана;

ρ, μ – плотность и вязкость жидкости ($\nu = \mu / \rho$).

Тогда в числителе второй дроби будет стоять формула для напряжения трения в турбулентном течении τ_t , предложенная Карманом [9] на основании предположения о локальном подобии поля пульсационных составляющих скорости, а в ее знаменателе – формула Ньютона для напряжения трения в ламинарном течении τ_ℓ . Следовательно,

$$\chi_{кр} = \frac{4}{\varkappa^2}\left(\frac{\tau_t}{\tau_\ell}\right)_{max} \qquad (5)$$

является критерием устойчивости. Так как ламинарное напряжение (вязкость) является стабилизирующим фактором, то можно выдвинуть предположение, что при условии

$$\frac{\tau_t}{\tau_\ell} = O(10) \qquad (6)$$

вязкость не подавляет турбулентность и начинается переход от ламинарной формы течения в турбулентную. Поэтому, подставляя оценку (6) в (5) и принимая $\varkappa = 0.4$, получим,что

$$\chi_{кр} = O(250). \qquad (7)$$

Возвращаясь к формуле (2) и следуя Л.Г. Лойцянскому [3] , вместо расстояния до твердой стенки y можно ввести " геометрический" масштаб турбулентности $\angle$ [10] , [11], который отличается от пути смешения ℓ лишь множителем $\varkappa$. Вместо величины $\partial u/\partial y$ для произвольного течения необходимо подставить величину, связанную с интенсивностью скорости деформации, т.е. инвариант I , где $I = e_{ij}\, e^{ij}$, а e_{ij} и e^{ij} – ковариантная и контравариантная составляющие тензора скоростей деформаций [12] . Тогда критерием устойчивости будет

$$\chi_{кр} = (\angle^2 I/\nu)_{max}. \qquad (8)$$

Величину $\angle$ можно определять по формуле, предложенной Н.И. Булевым [10]:

$$\frac{1}{\angle} = \int \frac{1}{S}\, d\varphi , \qquad (9)$$

в которой S – расстояние от рассматриваемой точки до твердой стенки в направлении φ .

Если рассматривается внешнее течение (пограничный слой, струя, след), то необходимо ввести множитель, учитывающий эффект перемежаемости во внешней зоне [11]

$$\angle = \angle_1 e^{-\angle_1/m\delta} , \qquad (10)$$

где $\angle_1$ определяется по формуле (9);

δ – толщина пограничного слоя;

m = 0.6–0.8 – постоянная.

В формуле (10) можно использовать другие аппроксимации коэффициента перемежаемости (см., например, [13]). Кроме того, в формуле типа (10) надо было бы учесть еще и демпфирующее влияние стенки. Однако соответствующий множитель очень быстро стремится к единице с удалением от стенки и в той области, где $\varkappa$ достигает максимального значения, как правило, нет необходимости учитывать этот фактор.

Вычислим величину $\varkappa_{кр}$ по формуле (8) для некоторых течений, для которых известны экспериментальные условия перехода.

Для плоского ламинарного течения Куэтта между пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии h, верхняя из которых движется со скоростью u_0 в своей плоскости, профиль скорости имеет вид

$$u = u_0 \eta, \quad \eta = y/h, \tag{11}$$

где y – координата, перпендикулярная пластинам.

В этом случае из формулы (9) следует, что

$$L = \eta (1-\eta) h, \tag{12}$$

а инвариант I определяется как

$$I = du/dy = u_0/h. \tag{13}$$

При подстановке формул (11), (13) в (8) получаем

$$\varkappa = AR; \quad A = L^2/h^2 = \eta^2 (1-\eta)^2; \quad R = u_0 h/\nu. \tag{14}$$

Из (14) можно найти критерий устойчивости

$$\varkappa_{кр} = A_{max} R_{кр}; \quad A_{max} = 1/16 \approx 0{,}063. \tag{15}$$

Так как по экспериментам Куэтта и Тейлора [2], [6], [7] $R_{кр}$ = = 1600–2400, то из (15) следует, что для течения Куэтта

$$\varkappa_{кр} = 100 - 150. \tag{16}$$

При течении Пуазейля в плоском канале шириной $2h$ характеристики, аналогичные (11) – (14), имеют вид

$$u = \frac{3}{2} u_{ср} (1-\eta^2); \quad L = \frac{1}{2} (1-\eta^2) h; \quad I = du/dy = 3 (u_{ср}/h) \eta; \quad \eta = y/h;$$

$$\varkappa = AR; \quad A = 3\eta L^2/h^2; \quad R = u_{ср} h/\nu, \quad A_{max} = 12/(25\sqrt{5}) \approx 0{,}215,$$

где y отсчитывается от центра канала,

$u_{ср}$ – средняя по сечению скорость потока.

Тогда

$$\varkappa_{кр} = A_{max} R_{кр} = 0{,}215 R_{кр} \tag{17}$$

Используя экспериментальные значения критического числа Рейнольдса из [2], которые равны 500–800, из (17) для плоского течения Пуазейля получаем

$$x_{кр} = 107.5 - 172. \qquad (18)$$

В случае течения Пуазейля в круглой трубе необходимые величины определяются формулами

$$u = 2u_{ср}(1-\varsigma^2); \quad L = \left\{(1-\varsigma^2)/[2E(\varsigma)]\right\} r_0; \quad I = du/dr = (4u_{ср}/r_0)\varsigma;$$

$$\varsigma = r/r_0; \quad x = AR; \quad A = 4\varsigma L^2/r_0^2; \quad R = u_{ср} r_0/\nu,$$

где r, r_0 – радиальная координата и радиус трубы;

$E(\varsigma)$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Численно было установлено, что $A_{max} \approx 0.131$, поэтому

$$x_{кр} = A_{max} R_{кр} = 0,131 R_{кр}. \qquad (19)$$

В работе [7] на основании исследований различных авторов приводятся значения критических чисел Рейнольдса от 750 до 1350, поэтому для кругового течения Пуазейля из (19) следует

$$x_{кр} = 98,3 - 176,9. \qquad (20)$$

Для течения Блазиуса в пограничном слое из [14] имеем

$$u = u_\infty f'(\eta); \quad L = \sqrt{\nu x/u_\infty}\, \eta_\infty e^{-\eta/\eta_\infty} m; \quad I = \partial u/\partial y = u_\infty \sqrt{u_\infty/\nu x}\, f''(\eta);$$

$$x = A\sqrt{R}; \quad A = (u_\infty/\nu x) L^2 f''(\eta); \quad R = u_\infty x/\nu; \quad \eta = y\sqrt{u_\infty/(\nu x)},$$

где f – безразмерная функция тока;

u_∞ – скорость набегающего потока;

x, y – координаты вдоль пластины от ее носка и по нормали к ней;

$\eta_\infty = 5$ – безразмерная толщина пограничного слоя.

Для определения A_{max} использовалась таблица $f''(\eta)$ из [14] и при $m = 0.6–0.8$ оказалось, что $A_{max} = 0.281–0.400$, тогда условие перехода

$$x_{кр} = A_{max}\sqrt{R_{кр}} = (0,281 - 0,400)\sqrt{R_{кр}}$$

для течения Блазиуса с учетом того, что критическое число Рейнольдса по измерениям Кармана [2] равно $1.5 \cdot 10^5$, запишется как

$$\chi_{кр} = 108{,}8 - 154{,}9 . \qquad (21)$$

Наконец, для пограничного слоя, образующегося на бесконечном диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω в неподвижной среде, имеем [14] :

$$u = \omega r F(\eta); \quad v = \omega r G(\eta); \quad L = \sqrt{\nu/\omega}\, e^{-\eta/\eta_\infty} m;$$

$$\Gamma = \sqrt{(\partial u/\partial y)^2 + (\partial v/\partial y)^2} = \omega r \sqrt{\omega/\nu}\, \sqrt{F'^2 + G'^2};$$

$$\chi = A\sqrt{R}; \quad A = (\omega/\nu) L^2 \sqrt{F'^2 + G'^2}; \quad R = \omega r^2/\nu; \quad \eta = \sqrt{\omega/\nu}\, y,$$

где r, y – расстояние вдоль радиуса диска и по нормали к его поверхности;

$F(\eta), G(\eta)$ – безразмерные профили скорости в радиальном и окружном направлениях;

$\eta_\infty = 5.4$ – безразмерная толщина пограничного слоя (определялась по асимптотической формуле для $G(\eta)$ из условия $G(\eta_\infty) = 0.01$).

Для $m = 0.6 - 0.8$ с таблицами для $F'(\eta)$ и $G'(\eta)$ из [14] численно установлено, что $A_{max} = 0.247 - 0.316$. Следовательно,

$$\chi_{кр} = A_{max}\sqrt{R_{кр}} = (0{,}247 - 0{,}316)\sqrt{R_{кр}} .$$

Если $R_{кр} = (1.9 - 2.8)\cdot 10^5$ по данным из [14] , то условием перехода для вращающегося диска будет

$$\chi_{кр} = 107{,}7 - 167{,}2 . \qquad (22)$$

Таким образом, из формул (16), (18), (20) – (22), следует, что для всех рассмотренных типов течений за условие перехода может быть принято

$$\chi_{кр} = 100 - 150 .$$

или в среднем

$$\chi_{кр} = 125 , \qquad (23)$$

тогда как критические числа Рейнольдса лежат в диапазоне от 500 до $2.8\cdot 10^5$.

Можно указать, что из (5) и (23) следует, что при смене режима течения

$$\tau_t / \tau_\ell \approx 5 ,$$

что совпадает с предположением (6).

В заключение отметим, что для окончательного ответа на вопрос от универсальности $x_{кр}$, вычисляемого по (8), в качестве критерия устойчивости течения, необходимо помнить, что эта величина будет функцией степени турбулентности и ряда других параметров. Поэтому при сопоставлении критериев $x_{кр}$ для различных типов течений необходимо выбирать экспериментальные значения критических чисел Рейнольдса с равными интенсивностями турбулентности. К сожалению пока это сделать не представляется возможным.

Литература

1. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М., "И.-Л.", 1962.
2. Rouse H. A general stability index for flow near plane boundaries, J. Aeron Sci., 1945, 12, N4, p.429-431.
3. Лойцянский Л.Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача. Изв. НИИГ, 1933, т.IX, с. 1-30.
4. Лойцянский Л.Г. Полуэмпирическая теория взаимодействия процессов молекулярного и молярного обмена в турбулентном движении жидкости. Тр. Всесоюзн. съезда по теорет. и прикл. механ. М., Изд-во АН СССР, 1962, с.145-166.
5. Van Driest E.R., Blumer C.B Boundary layer transition: free-stream turbulence and pressure gradient effects, AIAA Journal, 1963, 1, №6, p.1303-1306; русский перевод: Ван-Дрист, Блумер. Влияние турбулентности внешнего течения и градиента давления на переход в пограничном слое ламинарной формы течения в турбулентную. - "Ракетная техника и космонавтика". 1963, №6, с.25-29.
6. Лукаш А.Ю. Переход ламинарного течения в турбулентное. - "Вопросы соврем. строит. и архитектуры". Киев, "Будівельник", 1964, с.373-380.
7. Hrycak P., Levy M. Critical Reynolds number estimates by thermo-dynamic (stochastic) methods, Trans ASME, 1974, B96, N3; русский перевод: Грицак, Леви. Оценки значения критического числа Рейнольдса с помощью термодинамических (стохастических) методов. - "Конструирование и технология машиностроения". 1974, № 3, с.20-28.
8. Wolf P. Ähnlichkeitsbetrachtungen zur Stäbilität von Kanal-strömungen und Vergleich mit numerischer und Näherungs-lösung, Maschinenbautechnik, 1975, 24, N1, S.515-518.

9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. "Наука", 1973.
10. Булеев Н.И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. – "Теплопередача". М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 64-98.
11. Шахов В.Г. О длине пути перемешивания в турбулентном потоке.– В межвуз.сб.: Аэродинамика, динамика полета и системы управления. Куйбышев, 1972, с.28-36.
12. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.I.М., " Наука",1976.
13. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колёсников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., " Судостроение", 1973.
14. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., " Наука",1969.

УДК 532.526

В.Ф. Сивиркин, Ю.Л. Ратис,
В.А. Шишков

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ НА ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ

В работе [I] отмечается, что фактор скоростной сжимаемости по мере увеличения начального числа Маха M_0 оказывает все большее и большее влияние на закономерности турбулентного смешения расчетной турбулентной изотермической затопленной сверхзвуковой струи. При этих условиях следует ожидать существенного влияния на геометрическую структуру и интенсивность затухания струи показателя адиабаты $\varkappa$. Анализ этого влияния проведен на основе методики расчета, изложенной в работе [I], но, в отличие от нее, в данной статье не используются приближенные выражения для осевого числа Маха M_m и коэффициента расширения струи $K_{осн}$ в основном участке. Вместо этого составлена и отлажена программа расчета, позволяющая по методике из [I] без каких бы то ни было приближенных аппроксимаций рассчитывать все поле течения струи, включая начальный, переходный и основной участки.

Расчеты выполнялись на ЭЦВМ типа "М-222". Дифференциальное урав-