Л и т е р а т у р а

1. Я н е н к о Н.Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, I965, т.I09, № 3.
2. Я н е н к о Н.Н. Исследование совместности и методы интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, Труды 4-го Всес. матем. съезда, т. 2. Л., I964.
3. О в с я н н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Из-во СОАН СССР, Новосибирск, I962.

УДК 532.546

Л.И. М о г и л е в и ч

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуем плоскорадиальную фильтрацию сжимаемой жидкости, истекающей из скважины в пористый неизменяемый пласт мощности H. Линейный закон сопротивления Дарси справедлив здесь только до определенной скорости фильтрации v_*, называемой критической. При скорости фильтрации v, выше критической, закон Дарси нарушается, при этом в пласте одновременно действуют два закона сопротивления – линейный и нелинейный.

Фильтрация жидкости в трещиновато-пористом пласте исследована в [I].

Рассмотрим случай сверхкритической скорости фильтрации на скважине ($v_c > v_*$). Вблизи скважины радиуса r_c образуется зона с нелинейным законом сопротивления Смрекера [2] :

$$Re = G\Omega^{2/3};\ Re = \rho|v|k^{1/2}\mu^{-1};\ \Omega = \rho k^{3/2}|grad\, p|\mu^{-2}. \qquad (I)$$

Начиная с некоторого радиуса $r_1 = r_c R$, на котором достигается критическая скорость фильтрации, $v = v_* = const$ и до контура питания $r_K = r_c R_K$ имеется зона с докритической скоростью фильтрации и с линейным законом сопротивления Дарси [2] :

$$Re = \Omega,\ r_1 = r_c R \leqslant r \leqslant r_c R_K = r_K, \qquad (2)$$

где Re – число Рейнольдса;

Ω – число фильтрации;

p – давление;

ρ – плотность жидкости;

μ – коэффициент вязкости;

k – проницаемость пласта;

r – текущий радиус;

G – безразмерная постоянная.

Уравнение состояния для малосжимаемой жидкости принимается в виде [2]:

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{p-p_0}{\alpha}\right], \quad \left(\frac{p_0}{\alpha}\right)^{1/2} = \varepsilon \ll 1, \tag{3}$$

где индексом 0 отмечены параметры невозмущенного состояния на контуре питания;

α – модуль объемной упругости жидкости.

Наличие малого параметра ε, характеризующего сжимаемость жидкости, позволяет применить метод возмущений [3] для решения задачи. Методом деформированных координат получено равномерно пригодное решение в первом приближении. Определено влияние сжимаемости жидкости на потери давления в пласте и величину радиуса зоны с нелинейным законом сопротивления Смрекера.

Случай, когда вместо зоны с законом Смрекера (I) имеет место зона с квадратичным законом сопротивления $Re = G\,\Omega^{1/2}$, рассмотрен в работах [4], [5].

Уравнение неразрывности в неизменяемой пористой среде для плоскорадиальных течений имеет вид

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) + \frac{1}{r}\rho v = 0, \tag{4}$$

где $m = const$ – пористость среды;

t – время.

Пусть на скважине ($r = r_c$) давление равно p_c, на границе зоны с нелинейным законом сопротивления ($r = r_1$) давление – p_1, на контуре питания ($r = r_K$) давление – p_0.

Введем функцию q по формуле [2]

$$q = \int \rho\, dp - \alpha \rho_0 = \alpha(\rho - \rho_0); \quad grad\, q = \rho\, grad\, p \tag{5}$$

и безразмерные переменные

$$q = \rho_0 p_0 Q(\sigma, \tau); \quad r = r_c \sigma, \quad t = \frac{3}{2} m \left(G k^{1/2}\right)^{-1} \left(\mu r_c^5 \rho_0 p_0^{-2}\right)^{1/3} \tau;$$

$$v = G k^{1/2} \left(\mu r_c^2 \rho_0 p_0^{-2}\right)^{1/3} V(\sigma, \tau).$$

Скорости фильтрации на скважине v_c соответствует безразмерная скорость V_c , критической скорости v_* соответствует V_* .

Учитывая противоположное направление вектора скорости и градиента давления, согласно (I) – (5), в безразмерных переменных получим в зоне с нелинейным законом сопротивления ($\frac{\partial Q}{\partial \sigma} < 0$):

$$V = (1+\varepsilon^2 Q)^{-1}\left(-\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)^{2/3}, \quad 1 \leq \sigma \leq R \tag{6}$$

уравнение, описывающее фильтрацию

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma^2} + \frac{3}{2\sigma}\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \varepsilon^2\left(-\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)^{1/3}\frac{\partial Q}{\partial \tau} . \tag{7}$$

Условия на скважине ($\sigma = 1$) и на границе зоны с нелинейным законом сопротивления ($\sigma = R$) примут вид:

$$Q(1,\tau) = \varepsilon^{-2}\left\{exp\left(\varepsilon^2\frac{p_c - p_0}{p_0}\right) - 1\right\}; \quad V(1,\tau) = V_c(\tau);$$

$$Q(R,\tau) = \varepsilon^{-2}\left\{exp\left(\varepsilon^2\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right) - 1\right\}; \quad V(R,\tau) = V_* . \tag{8}$$

В зоне с линейным законом Дарси

$$V = \frac{2}{3}\varkappa(1+\varepsilon^2 Q)^{-1}\left(-\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right); \quad R \leq \sigma \leq R_к ;$$

$$\varkappa = \frac{3}{2}k^{1/2}c^{-1}\left(\mu^{-1}\rho_0 p_0 r_c^{-1}\right)^{1/3} \tag{9}$$

уравнение фильтрации имеет вид [5]

$$\varkappa\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right] = \varepsilon^2\frac{\partial Q}{\partial \tau} . \tag{10}$$

Условия для Q и V на границе зоны с нелинейным законом сопротивления ($\sigma = R$) имеют вид вторых условий (8), а на контуре питания ($\sigma = R_к$) получим

$$Q(R_к, \tau) = 0 . \tag{11}$$

Решение задачи (6) – (II) ищется в виде [3] , [5] :

$$Q = Q_0(S,\tau) + \varepsilon^2 Q_2(S,\tau) + \dots ; \quad \sigma = S + \varepsilon^2\Delta_2(S,\tau) + \dots$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = u = u_0(S,\tau) + \varepsilon^2 u_2(S,\tau) + \dots ; \quad \tau = \tau . \tag{12}$$

Подставим разложение (I2) в формулы (6) – (II) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, стоящие в правых и левых частях этих формул. Для того, чтобы получить решение, равномерно пригодное в первом приближении, потребуем чтобы второе приближение для U (градиента Q) имело особенность не большую, чем первое приближение [3], [5]. Это определит уравнение для деформирующей функции $\Delta_2(S, \tau)$. Кроме того потребуем, чтобы в зоне с нелинейным законом сопротивления выполнялось условие $\Delta_2(1, \tau)=0$, а в зоне с линейным законом сопротивления – условие $\Delta_2(R, \tau)=0$. Тогда, удовлетворяя условиям на скважине ($\sigma = 1$), в зоне с нелинейным законом сопротивления получим равномерно пригодное решение в первом приближении:

$$Q_0 = 2\frac{V_c^{3/2}(\tau)}{S^{1/2}} + \frac{\Delta p}{p_0} - 2V_c^{3/2}(\tau); \quad U_0 = -\frac{V_c^{3/2}(\tau)}{S^{3/2}}; \quad V = \frac{V_c(\tau)}{S};$$
$$\sigma = S + \varepsilon^2 S\left[\frac{4}{3}V_c' V_c^{-1/2}(1-S^{3/2}) + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta p}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)' V_c^{-1}(1-S^2)\right]; \quad \Delta p = p_c - p_0 \tag{I3}$$

(здесь штрих означает дифференцирование по τ).

В зоне с линейным законом сопротивления, удовлетворяя условиям при $\sigma = R$, получим решение в виде

$$Q_0 = -\frac{3}{2æ}V_* R \ln\frac{S}{R} + \frac{p_1 - p_0}{p_0}; \quad U_0 = -\frac{3}{2æ}\frac{V_* R}{S}; \quad V = \frac{V_* R}{S};$$

$$\sigma = S + \varepsilon^2 S\left[\left(\frac{1}{2æ}V_* R\ln R + \frac{p_1 - p_0}{3p_0}\right)'(V_* R)^{-1}(R^2 - S^2) - \frac{R}{2æR}\left(R^2\ln\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}} - S^2\ln\frac{S}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]. \tag{I4}$$

Следует отметить, что если скорость фильтрации на скважине незначительно больше критической скорости $\left(\frac{V_c}{V_*} = O(1)\right)$, то радиус зоны с нелинейным законом сопротивления $R(\tau)$ (следовательно и переменная S) порядка единицы. В этом случае с принятой точностью в формулах (I3) можно считать, что $\sigma = S$, получается решение для несжимаемой жидкости, а задача является задачей регулярных возмущений [3]. В противном случае $(V_c \gg V_*)$ решение (I3) учитывает в первом приближении сжимаемость жидкости [4]. Аналогичный вывод справедлив и для решения (I4), но так как $R_k \gg 1$ всегда, то переменная S вдали от скважины значительно больше единицы и сжимаемость жидкости необходимо учитывать для любой величины $R(\tau)$.

Пусть скорость на скважине V_c порядка критической скорости

V_* . Подставляя (I3) в условия на границе зоны с нелинейным законом сопротивления, получим значения радиуса зоны и потери давления в зоне с нелинейным законом сопротивления:

$$R = S_1 = \frac{V_c}{V_*}\,; \quad \frac{p_c - p_1}{p_0} = 2V_c^{3/2}\left[1 - \left(\frac{V_*}{V_c}\right)^{1/2}\right]; \quad \frac{p_c - p_1}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{p_1 - p_0}{p_0}\,. \qquad (I5)$$

Согласно решения (I4), удовлетворяя условию на контуре питания получим (с учетом того, что $S_K \gg R$)

$$S_K = R\exp\left[\frac{2\varkappa}{3}\,\frac{p_1 - p_0}{p_0 V_c}\right]; \quad R_K = S_K - \varepsilon^2\frac{S_K^3}{2\varkappa}\left[\ln(S_K R^{1/2})\right]'. \qquad (I6)$$

Если считать, что $\ln S_K \gg \frac{1}{2}$, то вместо второй формулы (I6) получим

$$R_K = S_K - \varepsilon^2\frac{S_K^2\,S_K'}{2\varkappa}\,, \qquad (I7)$$

где S_K , S_1 - значение S на контуре питания $\sigma = R_K$ и при $\sigma = R$

Если скорость фильтрации на скважине V_c значительно больше критической скорости V_* , то полагая $V_* = \varepsilon V_{**}$, $V_{**} = 0\,(1)$, удовлетворяя условиям на границе зоны с нелинейным законом сопротивления ($\sigma = R$), согласно решения (I3) получим формулы потери давления в зоне с нелинейным законом сопротивления и радиуса этой зоны:

$$S_1 = \frac{V_c}{\varepsilon V_{**}}\,; \quad \frac{p_c - p_1}{p_0} = 2V_c^{3/2}; \quad R = \frac{V_c}{\varepsilon V_{**}}\left\{1 - \frac{V_c}{3V_{**}^2}\left(\frac{\Delta p}{p_0} - 2V_c^{3/2}\right)'\right\};$$

$$\frac{p_c - p_1}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{p_1 - p_0}{p_0}\,, \quad \Delta p = p_c - p_0\,. \qquad (I8)$$

В зоне с линейным законом сопротивления согласно решения (I4), удовлетворяя условию на контуре питания, получим

$$S_K = R\exp\left[\frac{2\varkappa}{3}\,\frac{p_1 - p_0}{p_0\,\varepsilon V_{**} R}\right]; \quad R_K = S_K + \varepsilon^2\frac{S_K}{2\varkappa}\left\{RR'\ln\frac{S_K}{R} + \right.$$

$$\left. + (R^2 - S_K^2)\left[\ln(S_K R^{1/2})\right]'\right\}. \qquad (I9)$$

Если учесть, что $\ln S_K \gg \frac{1}{2}$, то вместо второй формулы (I9)получим

$$R_K = S_K + \varepsilon^2 \frac{S_K}{2\varkappa} \left\{ R R' \ln \frac{S_K}{R} + (R^2 - S_K^2)(\ln S_K)' \right\} . \qquad (20)$$

Соотношения (I5) – (20) определяют потери давления в пласте $\frac{\Delta P}{p_0}$ в зависимости от V_c в случае $V_c = O(V_*)$ и $V_c \gg V_*$.

Автор приносит благодарность С.В. Фальковичу за советы при обсуждении работы.

Л и т е р а т у р а

I. Е н т о в В.М., М и р з а д ж а н з а д е А.Х., М и щ е в и ч В.И. Об искривлении диаграмм скважин в трещиновато-пористых коллекторах.- ПМТФ, I97I, 4, с.95-I00.
2. Л е й б е н з о н Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.-Л., Гостехиздат, I947.
3. В а н - Д а й к М. Методы возмущений в механике жидкости. М., "Мир", I967.
4. М о г и л е в и ч Л.И. О плоскорадиальной фильтрации жидкости при наличии двух зон с нелинейным и линейным законами сопротивления. - В сб.: Аэродинамика. Изд-во Саратовского ун-та, I974, вып.3 (6), с.I3I-I38.
5. М о г и л е в и ч Л.И. К теории фильтрации сжимаемой жидкости.- В сб.: Аэродинамика. Изд-во Саратовского ун-та, I975, вып.4 (7), с. I59-I66.

УДК 532.5I7.2 + 536.2 + 538.4

В.Г. Ш а х о в

ЕСТЕСТВЕННАЯ ЛАМИНАРНАЯ ПОЛНОСТЬЮ РАЗВИТАЯ МГД КОНВЕКЦИЯ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ С ПОСТОЯННЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ

Рассмотрим естественную ламинарную конвекцию жидкости с постоянными физическими свойствами между параллельными вертикальными стенками длиной ℓ, отстоящими друг от друга на расстоянии h. Перпендикулярно этим стенкам направлено однородное магнитное поле с индук-