

Таким образом, найдены все решения системы (13) в замкнутом виде.

Т е о р е м а 2. Все решения системы уравнений газовой динамики в случае постоянного давления (13) описываются формулами (14), (15) и (16) - (22), (16) - (21), (23).

З а м е ч а н и е 3. Если в формуле (14) $\rho = w_3(u_1)$ и в формуле (21) $\rho = \rho(u_1, u_2)$ то будем иметь соответственно частные решения типа простых и двойных волн, здесь такие движения будут вихревые.

Л и т е р а т у р а

1. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., " Мир", 1964.
2. П о г о д и н Ю.Я., С у ч к о в В.А., Я н е н к о Н.Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ДАН СССР, 1958, т. 119, № 3.
3. Я н е н к о Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды 4 Всесоюзного математического съезда, т.2. Л., " Наука", 1964.
4. *Polh. W.F., Prötzel M.H. Difference methods and equations of hydrodynamics. Journal of mathematics and mechanics, 1963, vol.12, №2.*
5. К о ч и я Н.Е., К и б е л ь И.А., Р о з е Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч. П. М., Физматгиз, 1963.

С.М.ПОВЕРЕЗКИН

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси z , в области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-H < z < 0$, где x, y, z образуют декартову систему координат. Средний уровень моря - плоскость $z = 0$, океанское дно - плоскость $z = -H$, где $H = const$. Уравнение пластины $y = 0, |x| < b$.

Линеаризованные уравнения сохранения количества движения, массы и объема имеют вид [1]:

$$\begin{cases} u_t - fv + \rho_x / \rho_0 = 0; \\ v_t + fu + \rho_y / \rho_0 = 0; \\ W_t + \rho_z / \rho_0 + \rho g / \rho_0 = 0; \\ \rho_t + \rho_{0z} W = 0; \\ u_x + v_y + W_z = 0, \end{cases} \quad (I)$$

где u, v, w - возмущения компонент скорости в направлении осей соответственно x, y, z ; $\rho_0(z)$ и ρ - среднее и возмущенное поля плотности; f - инерционная частота; g - ускорение поля тяжести; индексы t, x, y, z , указывают на соответствующую производную.

Предположим, что ρ_0 и ρ_{0z} постоянны и движение периодически по времени:

$$W(x, y, z, t) = \bar{W}(x, y, z) e^{-i\sigma t}, \quad \sigma > 0.$$

Тогда из системы (I) получим уравнение для $\bar{W}(x, y, z)$

$$\omega^2 \Delta_h \bar{W} - \bar{W}_{zz} = 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \omega^2 = \frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2} > 0;$$

$N^2 = -g\rho_{0z}/\rho_0 = \text{const}$ - частота Вейселя.

Компоненты скорости связаны соотношениями

$$\begin{cases} \bar{U}_z = -\omega^2 (\bar{W}_x + i\gamma \bar{W}_y); \\ \bar{V}_z = -\omega^2 (\bar{W}_y - i\gamma \bar{W}_x), \end{cases}$$

где

$$\gamma = f/\sigma$$

Без учета взаимодействия внутренних и поверхностных волн граничные условия имеют вид

$$\bar{W} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = -H; \quad (3)$$

$$\bar{W}_y - i\gamma \bar{W}_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad |x| < b. \quad (4)$$

Падающую плоскую волну задаем в виде волны, распространяющейся под углом θ к пластине

$$\bar{W}_0 = \sum S_n \psi_n^*(x, y) \sin \frac{n\pi}{H} z,$$

где

$$\psi_n^* = \exp[-ik_n(x \cos \theta + y \sin \theta)]; \quad k_n = \frac{n\pi}{H\omega}$$

Ясно, что \bar{W}_0 - суперпозиция нормальных мод, удовлетворяющих уравнению (2) и граничному условию (3).

Решение задачи ищем в виде

$$\bar{W} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \Psi_n^T \sin \frac{n\pi}{H} z = \sum_{n=1}^{\infty} S_n (\Psi_n + \Psi_n^*) \sin \frac{n\pi}{H} z.$$

Из формул (2) и (4) получаем для каждой моды уравнение о граничном условии

$$(\Delta_n + \kappa^2) \Psi_n^T = 0. \quad (5)$$

$$\Psi_y^T - i\gamma \Psi_x^T = 0 \text{ при } y=0, |x| < b. \quad (6)$$

Решение должно удовлетворять условиям: $\Psi_y^T - i\gamma \Psi_x^T$ непрерывно при $y=0$ для всех x , Ψ^T непрерывно при $y=0$ для $|x| > b$.

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$\Psi_1^T = \Psi_1 + \Psi_0, \quad y \geq 0; \quad \Psi_2^T = \Psi_2 + \Psi_0, \quad y \leq 0.$$

Применяя к (5) преобразование Фурье по x

$$\bar{\Psi}^T(\lambda, y) = \int \Psi^T(x, y) e^{i\lambda x} dx,$$

получаем

$$\bar{\Psi}_{yy}^T - (\lambda^2 - \kappa^2) \bar{\Psi}^T = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7), ограниченное при $|y| \rightarrow \infty$, запишем в виде:

$$\bar{\Psi}_1(\lambda, y) = A(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} y}, \quad y > 0; \quad (8)$$

$$\bar{\Psi}_2(\lambda, y) = B(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} y}, \quad y \leq 0,$$

где ветвь $\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2}$ выбирается таким образом, чтобы $\arg \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Условие излучения выполняется при $\kappa = \kappa_0 + i\epsilon$, $0 < \epsilon \ll \kappa_0$.

Из непрерывности $\Psi_y - i\gamma \Psi_x$ при $y=0$ для всех x получаем

$$B(\lambda) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} + \gamma \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} - \gamma \lambda} A(\lambda). \quad (9)$$

Условие (6), переписанное в форме

$$\Psi_y - i\gamma \Psi_x = \begin{cases} a \exp(-ikx \cos \theta), & |x| < b, \\ m(x), & |x| > b; \end{cases}$$

где $a = k(i \sin \theta + \gamma \cos \theta)$ можно записать в виде

$$-A(\lambda) (\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} + \gamma \lambda) = e^{i\lambda b} m_+(a) + e^{-i\lambda b} m_-(a) -$$

$$-\frac{i\alpha}{\lambda - \kappa \cos \theta} \left[e^{i(\lambda - \kappa \cos \theta)b} - e^{-i(\lambda - \kappa \cos \theta)b} \right], \quad (10)$$

где $\bar{m}_+(x) = \int_b^{\infty} m(x) e^{i\lambda(x-b)} dx$, $\bar{m}_-(x) = \int_{-\infty}^b m(x) e^{-i\lambda(x-b)} dx$.

Условие непрерывности ψ для $|x| > b$, записанное в виде

$$\psi_2 - \psi_1 = \begin{cases} 0, & |x| > b, \\ g(x), & |x| < b \end{cases}$$

дает следующее соотношение

$$B(\lambda) - A(\lambda) = \bar{g}(\lambda), \quad (II)$$

где $\bar{g}(\lambda) = \int_{-b}^b g(x) e^{-i\lambda x} dx$.

Подставляя в уравнение (II) значения из равенств (9) и (10), получим

$$\begin{aligned} \bar{m}_+(\lambda) e^{i\lambda b} + K(\lambda) \bar{g}(\lambda) + \bar{m}_-(\lambda) e^{-i\lambda b} = \\ = \frac{i\alpha}{\lambda k \cos \theta} \left[e^{i(\lambda - k \cos \theta) b} - e^{-i(\lambda - k \cos \theta) b} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

где $K(\lambda) = \frac{(1-\gamma^2)(\lambda^2 - \lambda_0^2)}{2\sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}}$, $\lambda_0 = k/\sqrt{1-\gamma^2}$.

Представим $K(\lambda)$ в виде $K(\lambda) = K_+(\lambda) K_-(\lambda)$ так, чтобы $K_+(-\lambda) = K_-(\lambda)$. Такое представление единственно

$$K_+(\lambda) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\lambda + \lambda_0}{\sqrt{\lambda + k}}, \quad K_-(\lambda) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\lambda - \lambda_0}{\sqrt{\lambda - k}}$$

Умножая уравнение (12) на $\frac{e^{-i\lambda b}}{K_+(\lambda)}$, преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{m_+(\lambda)}{K_+(\lambda)} - \frac{i\alpha e^{-ikb \cos \theta}}{\lambda - k \cos \theta} \left[\frac{1}{K_+(\lambda)} - \frac{1}{K_+(k \cos \theta)} \right] + \right. \\ \left. + \bar{U}_+(\lambda) + \bar{V}_+(\lambda) \right\}_+ = \left\{ -e^{-i\lambda b} \bar{g}(\lambda) K_-(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{i\alpha e^{-ikb \cos \theta}}{(\lambda - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} - \bar{U}_-(\lambda) - \bar{V}_-(\lambda) \right\}_- \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{U}_+ + U_- = e^{-2i\lambda b} \bar{m}_-(\lambda) / K_+(\lambda)$;

$$\bar{V}_+ + V_- = \frac{i\alpha \exp[-i(2\lambda - k \cos \theta) b]}{(\lambda - k \cos \theta) K_+(\lambda)}$$

Левая часть аналитична в верхней полуплоскости ($\text{Im} \lambda > -\varepsilon$), правая - в нижней ($\text{Im} \lambda < \varepsilon$).

Умножим теперь (12) на $e^{-i\lambda b} / K_-(\lambda)$ и приведем его к виду

$$\left\{ \frac{\bar{m}_-(\lambda)}{K_-(\lambda)} + \frac{iae^{ikb\cos\theta}}{(\lambda - k\cos\theta)K_-(\lambda)} + R_-(\lambda) - S_-(\lambda) \right\} =$$

$$= \left\{ -e^{iab} \bar{q}(\lambda) K_+(\lambda) - R_+(\lambda) + S_+(\lambda) \right\}_- ; \quad (14)$$

$$R_+ + R_- = e^{\frac{2iab}{\lambda} \bar{m}_+(\lambda)}$$

где
$$S_+ + S_- = \frac{iae^{i(2a - k\cos\theta)b}}{(\lambda - k\cos\theta)K_-(\lambda)}$$

Левая часть аналитична в нижней полуплоскости, правая - в верхней.

Таким образом, уравнения (3) и (4) выполняются в полосе $-\varepsilon < \text{Im} \lambda < \varepsilon$. Так как $\bar{q}(\lambda) \sim O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, а $\bar{m}_+(\lambda) \sim O(\lambda^{-\sigma})$, $\bar{m}_-(\lambda) \sim O(\lambda^{-\sigma})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в полосе $-\varepsilon < \text{Im} \lambda < \varepsilon$, то обе части (3) и (4) стремятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в полосе $-\varepsilon < \text{Im} \lambda < \varepsilon$ [2]. Тогда по теореме Лиувилля (ограниченная функция, аналитичная во всей комплексной плоскости, постоянна) обе части (3) и (4) тождественно равны нулю. Приравнявая левые части нулю, получаем два уравнения для определения $\bar{m}_+(\lambda)$ и $\bar{m}_-(\lambda)$. Подобные уравнения решены в [3] для случая $kb \gg 1$. Следуя Нобду и применяя теорему о разбегании, приводим полученные уравнения к виду

$$\frac{\Phi_+^*(\lambda)}{K_+(\lambda)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{e^{-2i\alpha b} \Phi_-(\alpha)}{(\alpha - \lambda) K_+(\alpha)} d\alpha + \frac{iae^{-kb\cos\theta}}{(\lambda - k\cos\theta)K_+(k\cos\theta)} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\Phi_-(\lambda)}{K_-(\lambda)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{e^{2i\alpha b} \Phi_+^*(\alpha)}{(\alpha - \lambda) K_-(\alpha)} d\alpha = 0,$$

где
$$\Phi_+^*(\lambda) = \bar{m}_+(\lambda) - \frac{iae^{-kb\cos\theta}}{\lambda - k\cos\theta}; \quad (16)$$

$$\Phi_-(\lambda) = \bar{m}_-(\lambda) + \frac{iae^{kb\cos\theta}}{\lambda - k\cos\theta}.$$

Выберем a , $-\varepsilon < a < \varepsilon$, и положим $d = -c = a$.

В первом уравнении (15) заменим α на $-\alpha$, во втором заменим α на $-\alpha$. Тогда получим

$$\frac{\Phi_+^*(\lambda)}{K_+(\lambda)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{2i\alpha\beta} \Phi_-(-\alpha)}{(\alpha+\lambda)K_-(\alpha)} d\alpha + \frac{i\alpha e^{-ik\beta \cos\theta}}{(\lambda - k \cos\theta)K_+(k \cos\theta)} = 0;$$

$$\frac{\Phi_-(-\lambda)}{K_+(\lambda)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{2i\alpha\beta} \Phi_+^*(\alpha)}{(\alpha+\lambda)K_-(\alpha)} d\alpha = 0.$$

Теперь в обоих уравнениях $\text{Im } \lambda > -\alpha > -\epsilon$. Образуя сумму и разность этих уравнений, получаем

$$\frac{F_+^*(\lambda)}{K_+(\lambda)} + \frac{\sigma}{2\pi i} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{2i\alpha\beta} F_+^*(\alpha)}{(\alpha+\lambda)K_-(\alpha)} d\alpha = \frac{-i\alpha e^{-ik\beta \cos\theta}}{(\lambda - k \cos\theta)K_+(k \cos\theta)}, \quad (17)$$

где $F_+^*(\lambda) = \Phi_+^*(\lambda) - \sigma \Phi_-(-\lambda)$;

$\sigma = -1$ для суммы и $\sigma = 1$ для разности. Согласно (16) функция $F_+^*(\lambda)$ представляет в виде

$$F_+^*(\lambda) = \bar{m}_+(\lambda) - \sigma \bar{m}_-(-\lambda) - \frac{i\alpha e^{-ik\beta \cos\theta}}{\lambda - k \cos\theta} + \frac{\sigma i\alpha e^{ik\beta \cos\theta}}{\lambda + k \cos\theta}. \quad (18)$$

Для определения приближенного решения (17) воспользуемся интегралом Дюнса $\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{f(\alpha) e^{i\alpha\epsilon} \sqrt{\alpha-k}}{\alpha+\lambda} d\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha\epsilon} \epsilon^{-\frac{1}{2}} f(k) \bar{W}_0[-i(k+\lambda)\epsilon] +$

$$+ 2\pi i \sum_{\frac{1}{2}} \text{Res},$$

где
$$\bar{W}_0(z) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u} e^{-u}}{u+z} du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \bar{W}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(z).$$

$\bar{W}_{\kappa, m}$ - функция Уиттекера (учитываются только те полином, которые лежат в верхней полуплоскости, $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = k \cos\theta$).

Пользуясь интегралом Дюнса и учитывая вклад от вычетов, находим из уравнения (17)

$$F_+^*(\lambda) = -\sigma \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} e^{2ik\beta}}{\sqrt{2\beta} \pi k (\xi_0 - 1)} \frac{\lambda + \lambda_0}{\sqrt{\lambda + k}} F_+^*(k) \bar{W}_0[-i(k+\lambda)2\beta] +$$

$$+ \sigma \frac{i\epsilon^{2i\lambda_0\beta} \sqrt{\lambda_0 - k}}{\sqrt{\lambda + k}} F_+^*(\lambda_0) - \sigma \frac{i\alpha e^{ik\beta \cos\theta} \sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{k} (\cos\theta - \xi_0) \sqrt{\lambda + k}} \frac{\lambda + \lambda_0}{\lambda + k \cos\theta} -$$

$$- \frac{i\alpha e^{-ik\beta \cos\theta} \sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{k} (\cos\theta + \xi_0) \sqrt{\lambda + k}} \frac{\lambda + \lambda_0}{\lambda - k \cos\theta}, \quad (19)$$

где $\varphi_0 = 1/\sqrt{1-\gamma}$.

Пологая в этом уравнении $\lambda = k$, а затем $\lambda = \lambda_0$, находим неизвестные константы $F_+^*(k)$ и $F_+^*(\lambda_0)$. Поскольку $F_+^*(k) \sim O(1)$, то первым членом в правой части можно пренебречь, так как его порядок $O[(k\delta)^{-\frac{1}{2}}]$, и нам потребуется значение только $F_+^*(\lambda_0)$

$$F_+^*(\lambda_0) = \frac{2i\alpha\varphi_0}{K\sqrt{1+\varphi_0}(\cos^2\theta-\varphi_0^2)} \left(1 - e^{\frac{2i\lambda_0\delta}{\sqrt{1+\varphi_0}}}\right)^{-1} \left(e^{-ik\delta\cos\theta} \sqrt{1+\cos\theta} - e^{ik\delta\cos\theta} \sqrt{1-\cos\theta} \right).$$

Теперь уже можно найти $m_+(\lambda)$ и $\bar{m}_-(\lambda)$, так как из формулы

(19)
$$\bar{m}_+(\lambda) = \frac{1}{2} [F_+^*(\lambda, \theta = -1) + F_+^*(\lambda, \theta = 1)] + i\alpha e^{-ik\delta\cos\theta} / (\lambda - k\cos\theta);$$

$$\bar{m}_-(\lambda) = \frac{1}{2} [F_+^*(-\lambda, \theta = -1) - F_+^*(-\lambda, \theta = 1)] - i\alpha e^{ik\delta\cos\theta} / (\lambda - k\cos\theta).$$

Отсюда, используя (19) без первого члена более высокого порядка малости, получаем функции $\bar{m}_+(\lambda)$ и $\bar{m}_-(\lambda)$:

$$\bar{m}_+(\lambda) = \frac{i\alpha e^{-ik\delta\cos\theta}}{\lambda - k\cos\theta} \left[i \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{K}(\cos\theta-\varphi_0)} \frac{\lambda+\lambda_0}{\sqrt{\lambda+K}} \right] + \frac{C}{\sqrt{\lambda+K}};$$

$$\bar{m}_-(\lambda) = -\frac{i\alpha e^{ik\delta\cos\theta}}{\lambda - k\cos\theta} \left[i + \frac{i\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{K}(\cos\theta-\varphi_0)} \frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda-K}} \right] + \frac{D}{\sqrt{\lambda-K}},$$

где

$$C = E \left(e^{-ik\delta\cos\theta} \sqrt{1+\cos\theta} \frac{e^{\frac{2i\lambda_0\delta}{\sqrt{1+\varphi_0}}}\sqrt{\varphi_0-1}}{\sqrt{1+\varphi_0}} - e^{ik\delta\cos\theta} \sqrt{1-\cos\theta} \right);$$

$$D = E \left(i e^{-ik\delta\cos\theta} \sqrt{1+\cos\theta} + e^{ik\delta\cos\theta} \sqrt{1-\cos\theta} \frac{e^{\frac{2i\lambda_0\delta}{\sqrt{1+\varphi_0}}}\sqrt{\varphi_0-1}}{\sqrt{1+\varphi_0}} \right);$$

$$E = -\frac{2\alpha\varphi_0 e^{\frac{2i\lambda_0\delta}{\sqrt{1+\varphi_0}}}\sqrt{\varphi_0-1}}{\sqrt{K}\sqrt{1+\varphi_0}(\cos^2\theta-\varphi_0^2)} \left[1 + e^{\frac{4i\lambda_0\delta\varphi_0-1}{\varphi_0+1}} \right]^{-1}$$

Подставляя $\bar{m}_+(\lambda)$ и $\bar{m}_-(\lambda)$ в (10), находим $A(\lambda)$, а затем из (9) — $B(\lambda)$. Подставляя в уравнение (12) и применяя обратное преобразование Фурье

$$\psi_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_i(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad u = ky,$$

получаем решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \frac{ae^{ikb\cos\theta} \sqrt{1-\cos\theta}}{2\pi k (\cos\theta - \varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi - \varphi_0) \exp[-i(x+b)k\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi - 1} (\varphi - \cos\theta) (\sqrt{\varphi^2 - 1} + \gamma\varphi)} + \\ & + \frac{iae^{-ikb\cos\theta} \sqrt{1+\cos\theta}}{2\pi k (\cos\theta + \varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi + \varphi_0) \exp[-i(x-b)k\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi + 1} (\varphi - \cos\theta) (\sqrt{\varphi^2 - 1} + \gamma\varphi)} - \\ & - \frac{D}{2\pi\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(x+b)k\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi - 1} (\sqrt{\varphi^2 - 1} + \gamma\varphi)} - \frac{C}{2\pi\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(x-b)k\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi + 1} (\sqrt{\varphi^2 - 1} + \gamma\varphi)}; \\ \psi_2 = & \frac{ae^{ikb\cos\theta} \sqrt{1-\cos\theta}}{2\pi k (\cos\theta - \varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi - \varphi_0) \exp[-i(x-b)k\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi - 1} (\varphi - \cos\theta) (\sqrt{\varphi^2 - 1} - \gamma\varphi)} - \\ & - \frac{iae^{-ikb\cos\theta} \sqrt{1+\cos\theta}}{2\pi k (\cos\theta + \varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi + \varphi_0) \exp[-i(x-b)k\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi + 1} (\varphi - \cos\theta) (\sqrt{\varphi^2 - 1} - \gamma\varphi)} + \\ & + \frac{D}{2\pi\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(x+b)k\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi - 1} (\sqrt{\varphi^2 - 1} - \gamma\varphi)} + \frac{C}{2\pi\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(x-b)k\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1} k y] d\varphi}{\sqrt{\varphi + 1} (\sqrt{\varphi^2 - 1} - \gamma\varphi)} \end{aligned}$$

Асимптотический анализ решения проводим методом перевала. Асимптотика содержит две рассеянные цилиндрические волны от краев пластины

$$\begin{aligned} \psi_{y_1} = & \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{k} \frac{e^{ikb\cos\theta} \sqrt{1-\cos\theta}}{\cos\theta - \varphi_0} \frac{\cos\varphi_1 + \varphi_0}{\cos\varphi_1 + \cos\theta} - \frac{D}{\sqrt{k}} \right) \times \\ & \times \frac{|\sin\varphi_1|}{\sqrt{1+\cos\varphi_1}} \frac{\exp[i(kz_1 - \pi/4)]}{(i\sin\varphi_1 + \gamma\cos\varphi_1)\sqrt{kz_1}}; \\ \psi_{y_2} = & \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{k} \frac{e^{-ikb\cos\theta} \sqrt{1+\cos\theta}}{\cos\theta + \varphi_0} \frac{\varphi_0 - \cos\varphi_2}{\cos\varphi_2 + \cos\theta} - \frac{iC}{\sqrt{k}} \right) \times \\ & \times \frac{|\sin\varphi_2|}{\sqrt{1-\cos\varphi_2}} \frac{\exp[i(kz_2 - \pi/4)]}{(i\sin\varphi_2 + \gamma\cos\varphi_2)\sqrt{kz_2}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{(x+b)^2 + y^2}, \\ \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+b}, \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}, \\ \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-b}, \end{cases}$$

падающую плоскую волну во всем бассейне, кроме области тени под пластиной, и отраженную волну в области над пластиной

$$\psi_{пад} = \exp[-ikx \cos \theta - iky \sin \theta];$$

$$\psi_{отр} = \frac{i \sin \theta + \gamma \cos \theta}{i \sin \theta - \gamma \cos \theta} \exp(-ikx \cos \theta + iky \sin \theta).$$

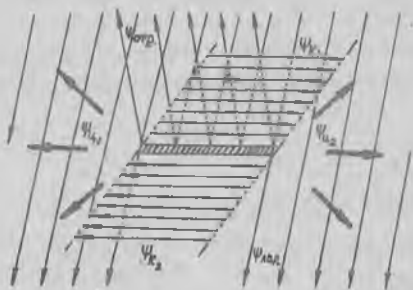
и две волны Кельвина: распространяющиеся над пластиной слева направо в угле $0 < \varphi_1 < \alpha$, где $\alpha = \arccos \sqrt{1-\gamma^2}$, и распространяющиеся под пластиной справа налево в угле $-\pi < \varphi_2 < -\pi + \alpha$ (в области справа и слева от пластины волн Кельвина нет, так как сумма амплитуд равна нулю)

$$\psi_{K_1} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma_0^2}(1-\gamma^2)} \left[\frac{2\alpha}{\kappa} \frac{e^{ikb \cos \theta} \sqrt{1-\cos \theta}}{\sqrt{1-\gamma^2}(\cos^2 \theta - \gamma_0^2)} + \frac{D}{\sqrt{\kappa}} \right] \times \\ \times \exp\left\{ \frac{\kappa}{\sqrt{1-\gamma^2}} [i(x+b) - \gamma y] \right\};$$

$$\psi_{K_2} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma_0^2}(1-\gamma^2)} \left[\frac{2\alpha}{\kappa} \frac{e^{-ikb \cos \theta} \sqrt{1+\cos \theta}}{\sqrt{1-\gamma^2}(\gamma_0^2 - \cos^2 \theta)} + \frac{iC}{\sqrt{\kappa}} \right] \times \\ \times \exp\left\{ \frac{\kappa}{\sqrt{1-\gamma^2}} [-i(x-b) + \gamma y] \right\}$$

Волновая картина показана на рис. 1.

Как и в случае дифракции плоской волны на полуплоскости [2], амплитуда образовавшихся волн Кельвина при определенных значениях частоты волны и угла падения может превосходить амплитуду падающей плоской волны.



Р и с. 1. Схема распространения волн

Л и т е р а т у р а

1. Л а м б Г. Гидродинамика. М.-Л., Гостехиздат, 1947.
2. Manton M.J., Mysak L.A., McEzgan R.E.
The diffraction of internal waves by a semi-infinite barrier. *J. Fluid Mech.* 1970, v, 43, p.11
3. Н о б л Б., Метод Винера-Хофа. М., И.-Л., 1962.

В.Ю.ОЛЬШАНСКИЙ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ОКОЛОЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

В работе [1] для решения прямой задачи околозвукового течения используется метод дифференцирования нелинейного уравнения по входящему в него параметру, впервые примененный в [2] при решении систем алгебраических нелинейных уравнений. В [1] при помощи метода двухмасштабных разложений строятся приближенные частные решения типа источника линейного уравнения (3). Решение задачи, которая в [1] составлена неточно, представляется в виде суперпозиции частных решений, вследствие чего условие непроницаемости на профиле выполнено приближенно.

В настоящей работе устраняется указанный недостаток: для околозвукового обтекания тонкого симметричного профиля проведены расчеты в случаях, когда $M < 1$ и $M > 1$.

1. Рассмотрим околозвуковое обтекание тонкого симметричного профиля однородным потоком идеального газа со скоростью U_∞ под нулевым углом атаки. Потенциал возмущений скорости φ в первом приближении подчиняется нелинейному уравнению Кармана-Фальковича

$$(1 - M^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0; \quad (1)$$

$$U = U_\infty (1 + \varphi_x); \quad 1 - M^2 = 1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_x,$$

где M - местное число Маха; γ - отношение удельных теплоемкостей; ось x направлена по потоку; U - проекция скорости на ось x .

Условие непроницаемости для профиля малой относительной толщи-