где f – стрела прогиба,

l – размах.

При равенстве длин контуров поперечных сечений двухдольного (ψ =0) и однодольного крыльев $f=\frac{l}{2}$ и согласно формуле (II) $\bar{C}_{ya}^{\alpha}$ = I,5. С другой стороны, из формулы (I0) при ψ =0 получаем $\bar{C}_{ya}^{\alpha}$= I,3. Таким образом, величина $\bar{C}_{ya}^{\alpha}$ жесткого однодольного крыла по сравнению с этой же величиной двухдольного крыла оказывается на 15% больше.

Л и т е р а т у р а

I. Холявко В.И. Аэродинамика неплоского крыла малого удлинения в потоке невязкой жидкости. -В кн: Самолетостроение и техника воздушного флота. – Харьков, I97I, вып. 24.

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: ГИТТЛ,I955, т.I.

3. Нилсен Дж. Аэродинамика управляемых снарядов.М.: Оборонгиз, I962.

УДК 533.69.0II

В.И.Х о л я в к о

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЛ ПРИ ДВИЖЕНИИ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ ОТ ТВЕРДОЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим приближенный метод расчета характеристик течения около тел, движущихся на малом расстоянии от твердой границы. Метод основан на разложении потенциала скоростей возмущенного течения в степенной ряд по координате, направленной поперек тонкого слоя жидкости, заключенного между границей течения и нижней поверхностью тела. Пренебрегая возмущенным течением на верхней поверхности, вычисляем аэродинамические характеристики несущих тел и присоединенные массы пластин. Для известных решений полученные результаты совпадают с результатами первого приближения метода сращиваемых асимптотических разложений [I] и квадрупольной теории крыла [2] .

Пусть вторая граница течения совпадает с поверхностью q_3 =0 криволинейной системы координат $q_i(q_1, q_2, q_3)$, а нижняя поверхность тела лежит в плоскости $q_3=q_0$ или незначительно отличается от этой плоскости так, что граничные условия могут быть снесены с поверхности тела на плоскость $q_3=q_0$. Считая, что линейные размеры течения в направлении оси q_3 существенно малы по сравнению с линейными размерами в направлении двух других осей, построим приближенное решение для потенциала скоростей возмущения $\varphi(q_i)$ в узкой области $0 \leqslant q_3 \leqslant q_0$. В этой области функция $\varphi(q_i)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\right)=0, \qquad (1)$$

где H_i – коэффициенты Ламе;
условию на твердой границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}=0; \quad q_3=0 \qquad (2)$$

и граничному условию на поверхности тела, которое определяется задачей обтекания.

Разложим решение для $\varphi(q_i)$ в ряд по степеням q_3 относительно плоскости $q_3=q_0$:

$$\varphi(q_1,q_2,q_3)=\varphi_0(q_1,q_2,q_0)+\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}(q_3-q_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_3^2}(q_3-q_0)^2+\cdots$$

(производные определяются в точках плоскости $q_3 = q_0$).
Если ограничиться первыми тремя членами разложения, то из граничного условия (2) получим связь между второй и первой производными, с учетом которой решение принимает вид

$$\varphi(q_1,q_2,q_3)=\varphi_0(q_1,q_2,q_0)+\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\left(1+\frac{q_3-q_0}{2q_0}\right)(q_3-q_0). \qquad (3)$$

Значения производной $\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}$ определяются граничными условиями на поверхности тела при $q_3=q_0$, а величина $\varphi_0(q_1,q_2,q_0)$ находится из уравнения, которое получается из уравнения Лапласа (1) после подстановки выражения (3):

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_0}\right)=-\frac{H_1 H_2}{q_0 H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \qquad (4)$$

Коэффициенты Ламе H_i в уравнении (4) вычисляются при $q_3=q_0$.

Таким образом, для расчета течения в узком слое жидкости $0 \leqslant q_3 \leqslant q_0$ необходимо решить двухмерное уравнение Пауссона (4) на плоскости $q_3=q_0$ в области, ограниченной контуром поверхности тела. Однозначность решения определяется заданием граничных условий на этом контуре. Построенное решение перестает быть справедливым в окрестности точек контура, где координата q_0 определяет область течения, соизмеримую с течением в направлении осей q_1 и q_2.

Можно, однако, ожидать, что возмущения в этой области носят локальный характер и погрешности расчета не скажутся существенно на интегральных характеристиках. Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Для течения в прямоугольной системе координат ($q_1=x, q_2=z, q_3=y$) при условии, что плоскость $q_3=y=0$ является твердой границей, а плоскость $q_3=q_0$ расположена на расстоянии H от границы, из уравнения (4) получаем:

$$\Delta \varphi_0(x,z) \equiv \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = -\frac{1}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \qquad (5)$$

Если рассматривать движение плоской пластины, лежащей в плоскости $y=H$, по нормали к твердой границе с единичной скоростью, то в правой части уравнения (5) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-1$ и на всех кромках пластины должно выполняться условие $\varphi_0=0$.

Следовательно, для расчета течения между нижней поверхностью пластины и твердой границей необходимо решить следующую краевую задачу (S и L – площадь и параметр пластины):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \varphi_0(x,z) = \frac{1}{H}, \quad x,z \in S \\ &\varphi_0(x,z) = 0, \quad x,z \in L \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Течение на верхней поверхности пластины в первом приближении может быть принято равным нулю. Действительно, если заменить пластину вихревым слоем, а влияние твердой границы – отображенной системой вихрей с противоположным направлением вращения, то течение на верхней поверхности будет определяться разностью скоростей, индуцируемых присоединенным вихревым слоем и отображенными вихрями. В пределе $H \to 0$ эта разность стремится к нулю. В следующих приближениях можно учесть возмущенное течение на верхней поверхности и уточнить полученные ниже результаты.

В принятом допущении присоединенную массу пластины вблизи твердой границы вычисляем по формуле

$$m = -\rho \int_S \varphi_0(x,z)\,dx\,dz.$$

Для частного случая движения отрезка прямой 2ℓ, параллельного оси z, краевая задача (6) принимает вид

$$\varphi_0''(z) = \frac{1}{H}; \quad \varphi_0(\pm\ell)=0. \qquad (7)$$

После интегрирования уравнения (7) и вычисления присоединенной массы получаем:

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{2H}(\ell^2 - z^2),\ m_0 = -\rho\int_{-\ell}^{\ell}\varphi_0(z)dz = \frac{2}{3}\rho\ell^2\frac{\ell}{H}. \tag{8}$$

Если учесть, что в безграничной жидкости $m_\infty = \pi\rho\ell^2$, то относительная величина присоединенной массы $m_* = m_0/m_\infty$ плоского отрезка твердой поверхности будет

$$m_* = \frac{2}{3\pi}\frac{\ell}{H} \approx \frac{0.212}{h},\quad h = H/\ell. \tag{9}$$

Примечательно, что краевая задача (6) аналогична различным другим техническим задачам: задаче о кручении призматического стержня, равновесия однородной мембраны, нагруженной равномерной нагрузкой; электростатической задаче о распределении электрического потенциала в листовом проводнике; гидродинамическим задачам о вращении невязкой жидкости с постоянной угловой скоростью в неподвижном сосуде и ламинарном течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе [3] . Эта аналогия позволяет переносить результаты решений одних задач на другие, а также устанавливать связи между различными характеристиками. Например, присоединенная масса плоской пластины может быть определена через коэффициент жесткости при кручении призматического стержня, поперечное сечение которого совпадает с формой пластины:

$$m = \frac{\rho}{4H}\frac{C}{\mu},\quad C = M/\theta, \tag{10}$$

где μ – упругая постоянная Ламе;

M – крутящий момент;

θ – угол закручивания стержня на единицу длины.

Пользуясь аналогией с кручением, приходим к утверждению, что из всех пластин одинаковой площади круг обладает наибольшей присоединенной массой (при $H = const$), из всех треугольников с данной площадью наибольшую присоединенную массу имеет равносторонний треугольник, а из всех четырехугольников – квадрат [4] . Из этой аналогии можно установить следующие неравенства для присоединенной массы плоских пластин вблизи твердой поверхности:

$$\rho\frac{\pi z_0^4}{8H} \leqslant m \leqslant \rho\frac{S^2}{8\pi H}, \tag{11}$$

где z_0 – максимальный внутренний радиус площади S [4] .

Равенство в формуле (11) имеет место для круга.

Приведем некоторые результаты, относящиеся к эллиптическим и прямоугольным пластинам. При движении эллиптической пластины с полу-

...ями a и b $(-b \leq x \leq b, -a \leq z \leq a)$ к твердой границе течение под пластиной и присоединенная масса определяются соотношениями

$$\varphi_0(x,z) = -\frac{a^2 b^2}{2H(a^2+b^2)}\left(1-\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}\right), \quad m = \pi\rho\frac{a^3 b^3}{4H(a^2+b^2)}. \tag{12}$$

Представляет интерес сравнение формулы для присоединенной массы (12) с приближенным выражением m', получаемым по методу плоских сечений [5]. Приняв $a > b$, запишем присоединенную массу отрезка прямой в сечении $z = const$, которая согласно (8) будет

$$m_0(z) = \frac{2}{3}\rho\frac{b^3(z)}{H} = \rho\frac{2}{3}\frac{b^3}{a^3 H}(a^2-z^2)^{3/2}.$$

Проинтегрировав по длине эллипса, будем иметь:

$$m' = \int_{-a}^{a} m_0(z)\,dz = \pi\rho\frac{a b^3}{4H}, \quad m = \frac{m'}{1+b^2/a^2}. \tag{13}$$

Из формул (13) следует, что при $a/b \geq 5$ метод плоских сечений дает удовлетворительные результаты.

Потенциал скоростей течения на нижней поверхности прямоугольной пластины $\left(-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\right)$ имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x,z) = -\frac{16 a^2 b^2}{\pi^4 H}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\bar{x}\,\sin\bar{z}}{(2m-1)(2n-1)[(2m-1)^2 a^2+(2n-1)^2 b^2]}, \tag{14}$$

$$\bar{x} = \frac{(2m-1)\pi x}{b}, \quad \bar{z} = \frac{(2n-1)\pi z}{a}.$$

Расчет присоединенной массы дает

$$m = \rho\frac{a b^3}{12H}\left(1-6\lambda^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{th\,p}{p^5}\right), \quad p = \frac{\pi(2k-1)\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{a}{b}. \tag{15}$$

Множитель перед скобками в формуле (15) определяет присоединенную массу прямоугольной пластины, вычисленную по методу плоских сечений, а выражение, стоящее в скобках, может рассматриваться как поправка на конечность размаха. Ее значения близко совпадают со значениями поправки, полученными экспериментально для прямоугольных пластин в безграничной жидкости [5]. При $\lambda \geq 10$ величина поправки отличается от единицы менее чем на 0,06.

В задаче обтекания тонкого крыла вблизи твердой границы невозмущенным потоком U_∞, направленным в сторону оси x, граничное условие на крыле задаем в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = U_\infty \left[\varepsilon F'_x(x,z) - \alpha\right], \tag{16}$$

где $y = \varepsilon F(x,z)$ - уравнение нижней поверхности крыла,

ε - малый параметр, характеризующий вогнутость или толщину профиля;

α - угол атаки.

Принимаем, что $\varepsilon/h, \alpha/h \ll 1$, $h = H/\ell$,

ℓ - хорда крыла или размах (для крыла малого удлинения).

Это позволяет снести граничные условия с поверхности крыла на плоскость $y = H$.

Решения задачи обтекания крыла, полученные при данных ограничениях, соответствуют линеаризованной теории малых возмущений. В задачах с конечными возмущениями граничные условия должны задаваться на поверхности крыла и, кроме того, необходимо учитывать переменность расстояния точек крыла до границы течения.

С учетом граничного условия (16) уравнение (5) записывается в виде

$$\Delta \varphi_0(x,z) = -\frac{U_\infty}{H}\left[\varepsilon F'_x(x,z) - \alpha\right], \quad F'_x(x,z) = \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{17}$$

Для решения уравнения (17) необходимо задать дополнительные условия на кромках крыла. На задней кромке должен выполняться постулат Жуковского-Чаплыгина и здесь $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0$, на передних и боковых кромках $\varphi_0 = 0$.

Рассмотрим обтекание крыльев различной формы в плане.

Крыло бесконечного размаха (обтекание тонкой дужки).

В этом случае потенциал скоростей зависит только от координаты $x (0 \leq x \leq b)$, где b - хорда профиля, уравнение (17) и граничные условия преобразуются к виду

$$\varphi_0''(x) = -\frac{U_\infty}{H}\left[\varepsilon F'(x) - \alpha\right], \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(b) = 0. \tag{18}$$

Интегрирование уравнения (18) приводит к следующему решению:

$$\varphi_0(x) = -\frac{U_\infty}{H}\left[\varepsilon \int_0^x F(x)\,dx + \left(bx - \frac{x^2}{2}\right)\alpha\right]. \tag{19}$$

Распределение давления по нижней стороне дужки определяется по линеаризованному уравнению Бернулли

$$\bar{P}_H = -\frac{2}{U_\infty}\varphi_0'(x) = \frac{2}{H}\left[\varepsilon F(x) + (b-x)\alpha\right],\quad F(0) = F(b) = 0. \qquad (20)$$

Пренебрегая возмущенным течением на верхней поверхности профиля, получаем $\bar{P}_b = 0$. В этом допущении подъемная сила профиля, момент относительно передней кромки и положение центра давления в долях хорды вычисляются по формулам

$$C_{ya} = \frac{1}{b}\int_0^b \bar{P}_H dx,\quad m_z = -\frac{1}{b^2}\int_0^b \bar{P}_H x dx,\quad x_g = -m_z / C_y.$$

С учетом уравнения (20) получаем

$$C_{ya} = \left[\alpha + \frac{2\varepsilon}{b^2}\int_0^b F(x)dx\right]\frac{b}{H},\quad m_z = -\frac{1}{3}\left[\alpha + \frac{6\varepsilon}{b^3}\int_0^b F(x)x dx\right]\frac{b}{H}. \qquad (21)$$

В частном случае плоской пластины ($\varepsilon = 0$) имеем

$$C_{ya} = \frac{b}{H}\alpha,\quad m_z = -\frac{b}{3H}\alpha,\quad x_g = 1/3. \qquad (22)$$

Решение (22) совпадает с результатами [6] при $\alpha \to 0$.

Второе слагаемое в скобках формулы подъемной силы (21) определяет с обратным знаком угол нулевой подъемной силы α_0 или подъемную силу тонкого телесного профиля при $\alpha = 0$ $C_{ya} = -\alpha_0 \frac{b}{H}$.

Для параболической дужки $F(x) = 4\frac{x(b-x)}{b}$ получаем $\alpha_0 = -\frac{4}{3}\varepsilon$. Так как в безграничном потоке $\alpha_0 = -2\varepsilon$, то вблизи твердой поверхности угол нулевой подъемной силы уменьшается по абсолютному значению на 66%.

Рассматривая тонкий профиль с параболической, эллиптической и синусоидальной нижней поверхностью

$$F_1(x) = 4\frac{x(b-x)}{b},\quad F_2(x) = -2\sqrt{x(b-x)},\quad F_3(x) = -b\sin\frac{\pi x}{b},$$

находим для силы присоса $(C_{ya_0} < 0)$ следующие значения:

$$C_{ya_{01}} = -\frac{4}{3}\frac{b}{H}\varepsilon,\quad C_{ya_{02}} = -\frac{\pi}{2}\frac{b}{H}\varepsilon,\quad C_{ya_{03}} = -\frac{4}{\pi}\frac{b}{H}\varepsilon.$$

Как видим, сила присоса эллиптического профиля примерно на 18% больше, чем параболического и синусоидального профилей [2].

Полуэллиптическое плоское крыло. Крыло имеет переднюю кромку эллиптической формы

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{\ell^2}=1,$$

где b – центральная хорда крыла;

ℓ – полуразмах.

Задняя кромка расположена в сечении максимального размаха $x=0$, ось направлена против невозмущенного потока.

Решение уравнения (17) при $\varepsilon=0$ дает для потенциала скоростей $\varphi_0(x,z)$ на нижней поверхности крыла следующее выражение:

$$\varphi_0(x,z)=\frac{U_\infty \alpha}{2H(b^2+\ell^2)}(\ell^2x^2+b^2z^2-b^2\ell^2). \qquad (23)$$

Отсюда, в частности, следует, что распределение циркуляции $\Gamma=-\varphi_0(x,z)$ по размаху и хорде крыла является параболическим.

Распределение давления по нижней поверхности крыла определяется по формуле

$$\bar{p}_H=\frac{2}{U_\infty}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=\frac{2\alpha\ell^2}{H(b^2+\ell^2)}x. \qquad (24)$$

Предполагая, что на верхней поверхности крыла $\bar{p}_b=0$, вычислем подъемную силу, продольный момент относительно вершины крыла и положение центра давления:

$$c_{ya}=\frac{1}{S}\iint_S \bar{p}_H\,dx=-\frac{2}{SU_\infty}\int_{-\ell}^{\ell}\varphi_0(0,z)\,dz;$$

$$m_z=-\frac{1}{Sb}\iint_S \bar{p}_H(b-x)\,dx=-c_y+\frac{1}{Sb}\iint_S \bar{p}_H\,x\,dx,\quad x_d=-m_z/c_y.$$

После интегрирования получаем:

$$c_{ya}=\frac{8b\ell^2}{3\pi H(b^2+\ell^2)}=\frac{d\ell}{3H}\,\frac{\lambda}{1+\left(\frac{\pi\lambda}{8}\right)^2},\quad m_z=-c_y\left(1-\frac{3\pi}{16}\right),$$

$$x_d=1-\frac{3\pi}{16}\approx 0{,}41,\ \text{где}\ \lambda=\frac{4\ell^2}{S}=\frac{8}{\pi}\,\frac{\ell}{b}. \qquad (25)$$

Решение (25) показывает, что координата центра давления полуэллиптического крыла не зависит от его удлинения λ и составляет 41% центральной хорды от вершины крыла.

Аэродинамические характеристики крыла малого удлинения в ограниченном потоке можно вычислить по теории тонкого тела [7] :

$$C_{ya}=\frac{2m(0)}{\rho S}\alpha,\quad x_g=1-\frac{1}{b\,m(0)}\int_0^b m(x)\,dx,$$

где $m(0)$ – значение присоединенной массы сечения по максимальному размаху;

$m(x)$ – присоединенная масса поперечного сечения крыла.

Согласно выражению (8) имеем

$$m(x)=\frac{2}{3}\rho\frac{z^3(x)}{H}=\rho\frac{2}{3}\frac{\ell^3}{H}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^{3/2},\quad m(0)=\rho\frac{2}{3}\frac{\ell^3}{H}$$

и, следовательно,

$$C_{ya}=\frac{\lambda\ell}{3H}\alpha,\quad x_g=1-\frac{3\pi}{16}\approx 0{,}41. \tag{26}$$

Эти результаты совпадают с результатами формул (25) (для подъемной силы при $\lambda\ll 1$).

Прямоугольное крыло. Расположим систему координат так, чтобы ось z совпала с передней кромкой крыла и была направлена вдоль размаха, а ось x проходила по центральному сечению в направлении набегающего потока. На поверхности крыла имеем $0\leqslant x\leqslant b,\ -\ell\leqslant z\leqslant \ell$ (b - хорда, 2ℓ - размах).
Задача обтекания крыла сводится к интегрированию уравнения (17) при следующих граничных условиях на кромках:

$$\varphi_0(0,z)=\varphi_0(x,\pm\ell)=0,\quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=0\ \text{при}\ x=b.$$

Методом разделения переменных решение задачи обтекания прямоугольного крыла вблизи твердой границы получаем в следующем виде:

$$\varphi_0(x,z)=U_\infty\frac{16b\ell}{\pi^2 H}\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{m,n}\frac{\sin\bar{x}\cos\bar{z}}{(2m-1)^2\ell^2+(2n-1)^2b^2}, \tag{27}$$

где

$$a_{m,n}=\int_0^b\int_0^l\left[\varepsilon F'_x(x,z)-\alpha\right]\sin\bar{x}\cos\bar{z}\,dx\,dz;$$

$$\bar{x}=\frac{(2m-1)\pi x}{2b};\quad \bar{z}=\frac{(2n-1)\pi z}{2l}.$$

Пользуясь решением (27), можно найти все параметры течения и вычислить аэродинамические характеристики крыла.

Для плоского крыла ($\varepsilon=0$) получаем

$$c_{ya}=\alpha\frac{b}{H}\left[1+\frac{128}{\pi^4\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^4}\,th\frac{\pi(2m-1)\lambda}{4}\right],$$

$$m_z=-\alpha\frac{b}{3H}\left\{1+\frac{384}{\pi^4\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^4}\left[1+\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^m}{2m-1}\right]\times\right. \tag{28}$$

$$\left.\times\, th\frac{\pi(2m-1)\lambda}{4}\right\}.$$

При $\lambda\to\infty$ из формул (28) следуют результаты, относящиеся к обтеканию плоской пластины (22). Для предельно малых значений $\lambda\to 0$ коэффициент подъемной силы стремится к значениям, определяемым по теории тонкого тела (26), а величина m_z с точностью до λ^2 включительно равна нулю. Это указывает на то, что вся аэродинамическая нагрузка сосредоточена на передней кромке крыла.

Коэффициент подъемной силы крыла с параболической дужкой $F(x)=4\frac{x(b-x)}{b}$ при $\alpha=0$ определяется формулой

$$c_{ya_0}=\frac{4}{3}\frac{b}{H}\varepsilon\left\{1-\frac{384}{\pi^4\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^4}\left[1+\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{2m-1}\right]th\frac{\pi(2m-1)\lambda}{4}\right\}. \tag{29}$$

В двух предельных случаях $\lambda\to\infty$ и $\lambda\to 0$ получаем следующие значения:

$$c_{ya_0}=\frac{4}{3}\frac{b}{H}\varepsilon,\ \lambda\to\infty,\quad c_{ya_0}=\frac{2}{3}\frac{b}{H}\varepsilon,\ \lambda\to 0,$$

которым соответствуют углы атаки нулевой подъемной силы $\alpha_0=-\frac{4}{3}\varepsilon$ и $\alpha_0=-4\varepsilon$. Как видим, при переходе от бесконечно большого удлинения к малому угол α_0 увеличивается по абсолютному значению. При $\lambda\to 0$ величина этого угла определяется по теории тонкого тела $\alpha_0=$

$-\varepsilon F'_x(b)$ [7] .

Рассмотрим обтекание тонкой несущей поверхности (крыла) в цилиндрическом канале кругового сечения радиуса R . Принимаем, что крыло изогнуто по дуге окружности радиусом r_0 с центром, расположенным на оси канала. Ширина щели между нижней поверхностью крыла и стенками канала составляет $H=R-r_0$ и $h=H/R\ll 1$. Здесь, как и в плоской задаче, не учитываем изменения H для различных точек крыла. Другими словами, считаем, что поверхность крыла мало отличается от цилиндрической поверхности $r=r_0$, на которую сносятся граничные условия с поверхности крыла.

Обтекание крыла удобно изучать в цилиндрической системе координат r, ϑ, x , совмещая ось x с осью канала и направлением набегающего потока U_∞ , а угол ϑ - отсчитывать от вертикального диаметра.

Примем $q_1=\vartheta$, $q_2=x$, $q_3=R-r$, $q_0=R-r_0=H$ и введем дополнительно прямоугольную систему координат, расположив координаты y, z в плоскости поперечного сечения; ось y направим вверх по вертикальному диаметру, а ось z - по горизонтальному. Связь между координатами определяется соотношениями

$$x=q_3 , \; y=-r\cos\vartheta=-(R-q_3)\cos q_1 , \; z=r\sin\vartheta=(R-q_3)\sin q_1 .$$

В данном случае коэффициенты Ламе равны $H_1=r_0 , H_2=H_3=1$ и уравнение (4) принимает вид

$$r_0^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\vartheta^2}=\frac{r_0^2}{R-r_0}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U_\infty\alpha\frac{r_0^2}{H}\cos\vartheta . \qquad (30)$$

Последнее равенство записано с учетом граничного условия на крыле, α - угол атаки в центральном сечении крыла ($\vartheta=0$). Зафиксируем кромки крыла: $x=0$ - передняя, $x=b$ - задняя, $\vartheta=\pm\beta$ - боковые, где b - хорда; 2β - центральный угол поперечного сечения крыла.

Граничные условия на кромках имеют вид

$$\varphi_0(0,\vartheta)=\varphi_0(x_1\pm\beta)=0, \; \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=0 \text{ при } x=b . \qquad (31)$$

Уравнение (31) с граничными условиями (31) можно решить методом разделения переменных. Имеем ($\bar{b} = b/z_0$)

$$\varphi_0(x,\vartheta) = -U_\infty \alpha \frac{4z_0^2\beta^2\bar{b}^{-2}}{\pi^2 H} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{(2m-1)^2\beta^2+(2n-1)^2\bar{b}^2} \times$$

$$\times \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2b} \cos\frac{(2n-1)\pi\vartheta}{2\beta};$$

$$a_{m,n} = -16\cos\beta \frac{(-1)^n(2n-1)}{(2m-1)[\pi^2(2n-1)^2-4\beta^2]}, \text{ при } \beta \neq \frac{\pi}{2}; \qquad (32)$$

$$a_{m,1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2m-1}, \quad a_{m,n}=0, n=2,3,\ldots, \text{ при } \beta = \frac{\pi}{2}.$$

При вычислении аэродинамических характеристик крыла принимаем, что несущие свойства определяются только нижней поверхностью ($\bar{x}=x/z_0$)

$$C_{ya} = \frac{2z_0}{S}\int_0^\beta\int_0^b \bar{P}_H \cos\vartheta d\vartheta dx = -\frac{4z_0}{SU_\infty}\int_0^\beta \varphi_0(l,\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta;$$

$$m_z = -\frac{2z_0}{Sb}\int_0^\beta\int_0^b \bar{P}_H x\cos\vartheta d\vartheta dx = -C_{ya} - \frac{4z_0^2}{Sb U_\infty}\int_0^\beta \cos\vartheta d\vartheta \int_0^{\bar{b}} \varphi_0(x,\vartheta)dx.$$

После интегрирования получаем:

при $\beta \neq \frac{\pi}{2}$

$$C_{ya} = \alpha\frac{128}{\pi^4}\frac{z_0^3\beta^3\cos^2\beta}{SH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\operatorname{sch} p}{\left[(2n-1)^2-4\frac{\beta^2}{\pi^2}\right]^2}, \quad p=\frac{\pi(2n-1)\bar{b}}{2\beta};$$

$$m_z = -C_{ya} + \alpha\frac{128}{\pi^4}\frac{z_0^3\beta_0^3\cos^2\beta}{SH}\sum\frac{1-\frac{1}{p}\operatorname{th} p}{\left[(2n-1)^2-4\frac{\beta^2}{\pi^2}\right]^2}; \qquad (33)$$

при $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$C_{ya} = \alpha\frac{\pi z_0^3}{SH}(1-\operatorname{sch}\bar{b}); \quad m_z = -\alpha\frac{\pi z_0^3}{SH}\left(\frac{\operatorname{th}\bar{b}}{\bar{b}} - \operatorname{sch}\bar{b}\right). \qquad (34)$$

Если в формулах (33) принять $\beta = \pi$, то получим аэродинамические характеристики кольцевого крыла в цилиндрической трубе. Сравнивая это крыло с плоским прямоугольным крылом одинакового удлинения $\lambda = \frac{2r_0}{b}$ и площадью $S = 2r_0 b$, получаем, что при $\lambda \gg 1$ подъемная сила крыла в цилиндрической трубе в $\frac{\pi}{2}$ раза больше подъемной силы прямоугольного крыла вблизи плоской твердой границы.

Литература

1. Рождественский К.В. Движение прямоугольного крыла между параллельными стенками. - Изв.высш.учеб.заведений. Авиационная техника. - Казань, 1978, № 4.
2. Панченков А.Н. Основы квадрупольной теории крыла вблизи твердой поверхности. - В кн.: Асимптотические методы в теории систем. - Иркутск: Гос. ун-т, 1974, вып. 7.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
4. Полиа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. - М.: ФМ, 1962.
5. Риман И.С., Крепс Р.Л. Присоединенные массы тел различной формы. - Труды ЦАГИ, 1947, № 635.
6. Крашаница Ю.А., Холявко В.И. Обтекание плоской пластины вблизи твердой границы (асимптотические формулы). - В кн.: Самолетостроение. Техника воздушного флота.- Харьков, 1976, вып.40.
7. Холявко В.И. Неплоское крыло малого удлинения в ограниченном потоке невязкой жидкости. - Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, №6.

УДК 533.695.12

В.А.Ф р о л о в

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕЖДУ КРЫЛОМ С ПОПЕРЕЧНЫМ V И ТЕЛОМ ВРАЩЕНИЯ

В обзорах [1] - [3] рассматриваются многочисленные методы исследования проблем взаимодействия корпуса и крыла. Работы, приведенные в обзорах, посвящены интерференции крыла и цилиндрического тела, когда плоскость крыла пересекает поверхность корпуса. Расчет по теории тонкого тела относительной подъемной силы плоского крыла вблизи цилиндра приводится в статье [4]. Результаты теоретического исследования взаимодействия V - образного крыла и плоского экрана