ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДОЛГОСРОЧНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

А.В. Салов

Введение

В настоящее время состояние острого кризиса Российской экономики можно считать пройденным этапом новейшей истории. Окончательно миновала угроза реставрации «коммунизма» (то есть государственной монополии на средства производства). Ушли в прошлое «челноки». Полки магазинов наполнились разнообразными товарами. Происходят изменения в налоговом законодательстве, стимулирующие активность предпринимателей. В общем и целом, улучшается бизнес-климат. Можно сказать, что наступила новая «рыночная эпоха» относительной экономической и политической стабильности. Большая часть населения России уже начала забывать про гиперинфляцию, которая являлась основным препятствием для инвестирования достаточно крупных и растянутых во времени проектов. Постепенно оживает отечественная промышленность. Как следствие, на повестку дня выходит проблема инвестирования среднесрочных и долгосрочных проектов модернизации и строительства промышленных предприятий. В связи с этим возникает задача оценки экономической эффективности этих проектов. Целью настоящей работы является разработка математического аппарата для решения указанной задачи.

1. Обобщенная модель Гудвина-Калецкого

В рамках настоящей работы мы полагаем, что инвестиции осуществляются в проект «мидиэкономических» масштабов. Поэтому в качестве исходной системы уравнений используем хорошо зарекомендовавшую себя модель Гудвина-Калецкого [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = \mu \cdot \left(\dfrac{1}{\vartheta}[K(t+\vartheta) - K(t)] + A(t) + \chi(t) - (1-c)Y(t) \right), \\ \dfrac{dK(t+\vartheta)}{dt} = \alpha \cdot (1-c) \cdot Y(t) - k \cdot K(t) + B_{ext}(t). \end{cases} \qquad (1)$$

В формуле (1) использованы следующие обозначения: Y - количество продукции, производимой в единицу времени; K - капитал; A - «независимые расходы»; $\chi(t)$ - случайная функция, соответствующая величине непредвиденных расходов, обусловленных «стихией рынка»; c - доля средств от реализации произведенной продукции, расходуемая на собственные нужды; $\alpha(1-c)$ - часть собственных средств, расходуемая на инвестиции; k - «коэффициент диссипации капитала» (грубо говоря, скорость амортизации основных фондов).

Кроме того, в формуле (1) присутствуют следующие величины: $B_{ext}(t)$ - скорость приращения капитала в результате привлечения внешних инвестиций; ϑ - время задержки в системе «инвестиции - капитал»; μ^{-1} - характерное время запаздывания в системе «спрос - предложение». Для того чтобы максимально наглядно проиллюстрировать роль времени запаздывания ϑ, приведем конкретный пример. Предположим, что строительство завода занимает 4 года. В течение этого периода капитал (основные фонды предприятия) растет, а выпуск продукции отсутствует. В этом случае на отрезке времени $t \in [0, \vartheta]$ приращение капитала будет определяться исключительно внешними инвестициями и амортизацией стареющего оборудования. Для времен $t > \vartheta$ функция $B_{ext}(t)$ представляет собой решение об инвестициях, направленных на модернизацию оборудования и расширение производства. Особо отметим, что член $B_{ext}(t)$ в обобщенную модель Гудвина-Калецкого впервые введен в настоящей работе. Дело в том, что в предыдущем цикле работ ряда авторов рассматривался процесс инвестирования производства на предприятиях, входящих в состав ФПГ. В рамках данной работы нас, в первую очередь, интересует экономическая отдача от внешних инвестиций. В связи с этим фактор $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{t})$ введен в явном виде, поскольку именно он описывает вклад инвестиционной компании в процесс реанимации производства.

В работе [1] было получено точное решение системы уравнений (1) без учета внешних инвестиций и случайной функции $\chi(\mathbf{t})$. В связи с этим представляется разумным построение точного формального решения этой системы уравнений с учетом новых факторов.

2. Точное решение задачи

Воспользуемся результатами работ [1,2] и применим метод преобразования Лапласа для решения системы (1). Легко показать, что в лапласовских изображениях она имеет вид

$$\begin{cases} [\lambda+\mu(1-c)]\widetilde{Y}(\lambda)-\dfrac{\mu}{\vartheta}[\exp(\lambda\vartheta)-1]\widetilde{K}(\lambda)=\mu\left(\widetilde{A}(\lambda)+\widetilde{\chi}(\lambda)\right)+Y(0)-\dfrac{\mu}{\vartheta}\exp(\lambda\vartheta)\widetilde{K}_0(\lambda), \\ -\alpha(1-c)\widetilde{Y}(\lambda)+[\lambda\cdot\exp(\lambda\vartheta)+k]\widetilde{K}(\lambda)=\lambda\cdot\exp(\lambda\vartheta)\widetilde{K}_0(\lambda)+K(\vartheta)+\widetilde{B}_{ext}(\lambda), \end{cases} \tag{2}$$

где величина

$$\widetilde{K}_0(\lambda)\equiv\int_0^{\vartheta}dt\cdot\exp(-\lambda t)K_0(t) \tag{3}$$

описывает инвестиционную историю системы ($\mathbf{K}(\mathbf{t})=\mathbf{K}_0(\mathbf{t})$ при $\mathbf{t}\in[0,\vartheta]$), а лапласовское изображение $\widetilde{\mathbf{U}}(\lambda)$ ($\mathbf{U}=(\mathbf{Y},\mathbf{K},\mathbf{A},\chi,\mathbf{B}_{ext})$) определяется выражением

$$\widetilde{U}(\lambda)\equiv\int_0^{\infty}dt\cdot\exp(-\lambda t)U(t). \tag{4}$$

Система уравнений (2) имеет очевидное решение

$$\begin{cases} \widetilde{Y}(\lambda)=\widetilde{\kappa}_1(\lambda)+\widetilde{\kappa}_2(\lambda)\cdot\left(\widetilde{A}(\lambda)+\widetilde{\chi}(\lambda)\right)+\widetilde{\kappa}_3(\lambda)\cdot\widetilde{K}_0(\lambda)+\widetilde{\kappa}_4(\lambda)\cdot\widetilde{B}_{ext}(\lambda), \\ \widetilde{K}(\lambda)=\widetilde{\eta}_1(\lambda)+\widetilde{\eta}_2(\lambda)\cdot\left(\widetilde{A}(\lambda)+\widetilde{\chi}(\lambda)\right)+\widetilde{\eta}_3(\lambda)\cdot\widetilde{K}_0(\lambda)+\widetilde{\eta}_4(\lambda)\cdot\widetilde{B}_{ext}(\lambda), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} \widetilde{\kappa}_1(\lambda)=\dfrac{\left(\lambda\exp(\lambda\vartheta)+k\right)Y(0)+(\mu/\vartheta)\left(\exp(\lambda\vartheta)-1\right)K(\vartheta)}{\Delta(\lambda)}, \\ \widetilde{\kappa}_2(\lambda)=\dfrac{\mu\left(\lambda\exp(\lambda\vartheta)+k\right)}{\Delta(\lambda)}, \\ \widetilde{\kappa}_3(\lambda)=-\dfrac{\mu}{\vartheta}\dfrac{\left(\lambda+k\right)\exp(\lambda\vartheta)}{\Delta(\lambda)}, \\ \widetilde{\kappa}_4(\lambda)=\dfrac{\mu}{\vartheta}\dfrac{\exp(\lambda\vartheta)-1}{\Delta(\lambda)}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\eta}_1(\lambda)=\dfrac{\alpha(1-c)Y(0)+\left(\lambda+\mu(1-c)\right)K(\vartheta)}{\Delta(\lambda)}, \\ \widetilde{\eta}_2(\lambda)=\dfrac{\alpha\mu(1-c)}{\Delta(\lambda)}, \\ \widetilde{\eta}_3(\lambda)=\dfrac{1}{\vartheta}\dfrac{\left(\vartheta\lambda^2+\mu(1-c)(\vartheta\lambda-\alpha)\right)\exp(\lambda\vartheta)}{\Delta(\lambda)}, \\ \widetilde{\eta}_4(\lambda)=\dfrac{\lambda+\mu(1-c)}{\Delta(\lambda)}. \end{cases} \tag{7}$$

Причем аналитическая функция

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+\mu(1-c))(\lambda\cdot\exp(\lambda\vartheta)+k)-\mu\alpha\cdot(1-c)\frac{\exp(\lambda\vartheta)-1}{\vartheta} \tag{8}$$

представляет собой определитель системы уравнений (2).

Совершенно очевидно, что коэффициенты, определяемые соотношениями (6), (7) также являются аналитическими функциями аргумента λ. Они имеют лишь полюса, положение которых определяется трансцендентным уравнением

$$\Delta(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Лапласовские оригиналы этих функций имеют вид

$$\begin{cases} \kappa_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_j \left[\exp(\lambda t)\tilde{\kappa}_i(\lambda)\right] \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_i^{(j)}(t), \\ \eta_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_j \left[\exp(\lambda t)\tilde{\eta}_i(\lambda)\right] \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \eta_i^{(j)}(t). \end{cases} \tag{10}$$

Если уравнение (8) имеет корни кратности s_j (включая тривиальный случай простых корней, т.е. $s_j = 1$), то j -е слагаемое в сумме (10) имеет вид

$$\begin{cases} \kappa_i^{(j)}(t) = \dfrac{1}{(s_j - 1)!} \dfrac{d^{s_j-1}}{d\lambda^{s_j-1}} \left[\exp(\lambda t)\tilde{\kappa}_i(\lambda)(\lambda - \lambda_j)^{s_j}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \exp(\lambda_j t) \cdot \sum_{k=0}^{s_j-1} t^k v_k, \\ \eta_i^{(j)}(t) = \dfrac{1}{(s_j - 1)!} \dfrac{d^{s_j-1}}{d\lambda^{s_j-1}} \left[\exp(\lambda t)\tilde{\eta}_i(\lambda)(\lambda - \lambda_j)^{s_j}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \exp(\lambda_j t) \cdot \sum_{k=0}^{s_j-1} t^k w_k, \end{cases} \tag{11}$$

где v_k, w_k - постоянные коэффициенты.

Для нахождения окончательного результата воспользуемся теоремой о конволюции, а также тем фактом, что независимые расходы $A(t)$ и инвестиционная история мидиэкономической системы $K(t) = K_0(t),\ t \in [0, \vartheta]$ в рамках решаемой задачи считаются известными функциями времени.

Тогда

$$\begin{cases} Y(t) = \sum_{l=1}^{4} Y_l(t), \\ K(t) = \sum_{l=1}^{4} K_l(t), \end{cases} \tag{12}$$

причем

$$\begin{cases} Y_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_1^{(j)}(t), \\ K_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_1^{(j)}(t), \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} Y_2(t) = \int_0^t \kappa_2(\xi)\big(A(t-\xi) + \chi(t-\xi)\big)d\xi, \\ K_2(t) = \int_0^t \eta_2(\xi)\big(A(t-\xi) + \chi(t-\xi)\big)d\xi, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} Y_3(t) = \int_0^t \kappa_3(\xi)\Theta(\vartheta - t + \xi)K_0(t-\xi)d\xi, \\ K_3(t) = \int_0^t \eta_3(\xi)\Theta(\vartheta - t + \xi)K_0(t-\xi)d\xi, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} Y_4(t) = \int_0^t \kappa_4(\xi) B_{ext}(t-\xi)d\xi, \\ K_4(t) = \int_0^t \eta_4(\xi) B_{ext}(t-\xi)d\xi, \end{cases} \tag{16}$$

где $\Theta(z)$ - так называемая ступенчатая Θ -функция Хевисайда: $\Theta(z) = \begin{cases} 1 \text{ при } z \geq 0 \\ 0 \text{ при } z < 0 \end{cases}$.

Формулы (12) - (16) дают исчерпывающее описание динамики исследуемой экономической системы "в целом", то есть описание ее реакции на внешние финансовые «вливания». Однако с прагматической точки зрения эти соотношения почти бесполезны, поскольку численное обратное преобразование Лапласа весьма затруднительно, а аналитические исследование свойств полученного решения практически невозможно.

3. Приближение долгосрочных инвестиций

Если в задаче имеется малый параметр $(\mu\vartheta)^{-1} << 1$, соответствующий долгосрочным инвестиционным проектам, то система уравнений (1) допускает решение методами теории возмущений. В этом приближении малыми величинами считаются параметр $(\mu\vartheta)^{-1} << 1$ и функция $\exp(-\lambda\vartheta)$. Малость последней величины связана с тем, что для любых времен $t > \vartheta$ контур интегрирования можно неограниченно сдвигать в правую полуплоскость комплексной переменной λ.

С учетом сделанных замечаний перепишем соотношение (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (\lambda + \mu(1-c))(\lambda \cdot \exp(\lambda\vartheta) + k) - \mu\alpha \cdot (1-c)\frac{\exp(\lambda\vartheta) - 1}{\vartheta} = \\ &= \left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right]\exp(\lambda\vartheta) + k\lambda + k\mu(1-c) - \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\exp(\lambda\vartheta) + \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}. \end{aligned} \tag{17}$$

В исследуемом приближении $\mu\vartheta >> 1$ функцию $\Delta^{-1}(\lambda)$ можно переписать как

$$\Delta^{-1}(\lambda) = \frac{\exp(-\lambda\vartheta)}{\left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right] - \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta} + \left[k\lambda + k\mu(1-c) + \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\right]\exp(-\lambda\vartheta)}, \tag{18}$$

и разложить ее в ряд по малому параметру $\frac{1}{\mu\vartheta} << 1$:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}(\lambda) &\approx \frac{\exp(-\lambda\vartheta)}{\left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right]} + \\ &+ \frac{\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta} - \left[k\lambda + k\mu(1-c) + \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\right]\exp(-\lambda\vartheta)}{\left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right]^2}\exp(-\lambda\vartheta) = \\ &= D_1(\lambda) + D_2(\lambda) + D_3(\lambda). \end{aligned} \tag{19}$$

В формуле (19) использованы следующие вспомогательные обозначения:

$$D_1(\lambda) = \frac{\exp(-\lambda\vartheta)}{\left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right]} = \frac{\exp(-\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}, \tag{20}$$

где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -\mu(1-c)$,

$$D_2(\lambda) = \frac{\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\exp(-\lambda\vartheta)}{\left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right]^2} = \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \frac{\exp(-\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}, \tag{21}$$

$$D_3(\lambda) = -\frac{\left[k\lambda + k\mu(1-c) + \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\right]\exp(-2\lambda\vartheta)}{\left[\lambda^2 + \lambda\mu(1-c)\right]^2} = \\ = \frac{k\lambda\vartheta + (\alpha + k\vartheta)\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \frac{\exp(-2\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}. \tag{22}$$

Введенные нами вспомогательные функции имеют следующие аналитические свойства. Функция $D_1(\lambda)$ имеет два простых полюса $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -\mu(1-c) \le 0$ и экспоненциально убывает с ростом $Re(\lambda)$ на всей комплексной плоскости ($\lambda \in C$). Функции $D_2(\lambda)$ и $D_3(\lambda)$ имеют полюса $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -\mu(1-c) \le 0$ кратности $s_0 = s_1 = 2$.

Приведем решение поставленной задачи в двухполюсном приближении. В рамках решаемой задачи возникает необходимость вычисления 13 вспомогательных интегралов вида

$$f_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \exp(\lambda t) F_j(\lambda) d\lambda, \tag{23}$$

где

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}; \quad F_2(\lambda) = \frac{\lambda}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}; \quad F_3(\lambda) = \frac{\lambda^2}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)};$$

$$F_4(\lambda) = \frac{\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}; \quad F_5(\lambda) = \frac{\lambda\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}; \quad F_6(\lambda) = \frac{\lambda^2\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)};$$

$$F_7(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}; \quad F_8(\lambda) = \frac{\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}; \quad F_9(\lambda) = \frac{\lambda^2}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2};$$

$$F_{10}(\lambda) = \frac{\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}; \quad F_{11}(\lambda) = \frac{\lambda\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}; \quad F_{12}(\lambda) = \frac{\lambda^2\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2};$$

$$F_{13}(\lambda) = \frac{\lambda^3\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}.$$

Совершенно очевидно, что для выполнения всех расчетов достаточно вычислить два базовых интеграла: $f_4(t)$ и $f_{10}(t)$.

Согласно соотношению (23) интеграл $f_4(t)$ равен:

$$f_4(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \exp(\lambda t) F_4(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \exp(\lambda t)\frac{\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)} d\lambda. \tag{24}$$

Интегрирование выражения (24) производится стандартными методами:

$$f_4(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \exp(\lambda t)\frac{\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)} d\lambda = \\ = \Theta(t-\tau)\left[\frac{\exp(\lambda_0(t-\tau))}{\lambda_0-\lambda_1} + \frac{\exp(\lambda_1(t-\tau))}{\lambda_1-\lambda_0}\right]. \tag{25}$$

Ступенчатая функция в выражении (25) возникает из-за того, что в подынтегральном выражении $f_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \exp(\lambda t) F_j(\lambda) d\lambda$, определяющем функцию $f_j(t)$, содержится экспонента $\exp(-\lambda\tau)$, зависящая от времени задержки τ. Если $t < \tau$, то при вычислении интеграла типа (25) следует использовать теорему Коши и контур интегрирования сдвигать вправо и замыкать в правой полуплоскости. Но в правой полуплоскости подынтегральная функция не имеет полюсов. Поэтому соответствующий интеграл зануляется.

Если же $t \ge \tau$, то для обеспечения сходимости рассматриваемого интеграла контур интегрирования следует замыкать в левой полуплоскости. Но в левой полуплоскости подынтегральная функция содержит простые полюса $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = -\mu(1-c) \le 0$. В результате интеграл (25) элементарно вычисляется по теореме о вычетах.

Учитывая, что $\lambda_0 = 0$, преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \Theta(t-\tau)\left[\frac{\exp(\lambda_0(t-\tau))}{\lambda_0-\lambda_1} + \frac{\exp(\lambda_1(t-\tau))}{\lambda_1-\lambda_0}\right] = \\ &= \frac{\Theta(t-\tau)}{-\lambda_1}\left[1-\exp(\lambda_1(t-\tau))\right], \end{aligned} \tag{26}$$

учитывая, что $\lambda_1 = -\mu(1-c) < 0$, представим $f_4(t)$ в виде

$$f_4(t) = \frac{\Theta(t-\tau)}{|\lambda_1|}\left[1-\exp\left(-|\lambda_1|(t-\tau)\right)\right] \equiv \varphi(t,\tau). \tag{27}$$

Через функцию $f_4(t) \equiv \varphi(t,\tau)$, определяемую выражением (27), легко выражаются интегралы $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_5(t), f_6(t)$. В самом деле, для любых $t > \tau$ имеют место следующие соотношения:

$$f_1(t) = \varphi(t,0) = \frac{\Theta(t)}{|\lambda_1|}\left[1-\exp\left(-|\lambda_1|t\right)\right]; \tag{28}$$

$$f_2(t) = \frac{\partial\varphi(t,0)}{\partial t} = \Theta(t)\exp\left(-|\lambda_1|t\right); \tag{29}$$

$$f_3(t) = \frac{\partial^2\varphi(t,0)}{\partial t^2} = -|\lambda_1|\cdot\Theta(t)\exp\left(-|\lambda_1|t\right); \tag{30}$$

$$f_4(t) \equiv \varphi(t,\tau) = \frac{\Theta(t-\tau)}{|\lambda_1|}\left[1-\exp\left(-|\lambda_1|(t-\tau)\right)\right]; \tag{31}$$

$$f_5(t) = \frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial t} = \Theta(t-\tau)\exp\left(-|\lambda_1|(t-\tau)\right); \tag{32}$$

$$f_6(t) = \frac{\partial^2\varphi(t,\tau)}{\partial t^2} = -|\lambda_1|\cdot\Theta(t-\tau)\exp\left(-|\lambda_1|(t-\tau)\right). \tag{33}$$

Точно так же остальные семь интегралов выражаются через базовый интеграл $f_{10}(t)$:

$$f_{10}(t) \equiv \psi(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty}\exp(\lambda t)F_{10}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty}\exp(\lambda t)\frac{\exp(-\lambda\tau)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}d\lambda. \tag{34}$$

Учитывая, что оба полюса имеют кратность $s = 2$, представим $\psi(t,\tau)$ в следующем виде:

$$\psi(t,\tau) = \psi_0(t,\tau) + \psi_1(t,\tau), \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0(t,\tau) &= \Theta(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\frac{\exp(\lambda(t-\tau))}{(\lambda-\lambda_1)^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= \Theta(t-\tau)\exp(\lambda(t-\tau))\left[(t-\tau)(\lambda-\lambda_1)^{-2} - 2(\lambda-\lambda_1)^{-3}\right]_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= \Theta(t-\tau)\left[(t-\tau)(\lambda_1)^{-2} + 2(\lambda_1)^{-3}\right], \end{aligned} \tag{36}$$

$$\psi_1(t,\tau)=\Theta(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\exp(\lambda(t-\tau))}{(\lambda-\lambda_0)^2}\bigg|_{\lambda=\lambda_1}=$$
$$=\Theta(t-\tau)\exp(\lambda(t-\tau))\left[(t-\tau)(\lambda-\lambda_0)^{-2}-2(\lambda-\lambda_0)^{-3}\right]_{\lambda=\lambda_1}= \tag{37}$$
$$=\Theta(t-\tau)\exp(\lambda_1(t-\tau))\left[(t-\tau)(\lambda_1)^{-2}-2(\lambda_1)^{-3}\right]$$

$$\psi(t,\tau)=\psi_0(t,\tau)+\psi_1(t,\tau)=\Theta(t-\tau)\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\exp(\lambda(t-\tau))}{(\lambda-\lambda_1)^2}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\exp(\lambda(t-\tau))}{(\lambda-\lambda_0)^2}\bigg|_{\lambda=\lambda_1}\right\}=$$
$$=\Theta(t-\tau)\left[(t-\tau)(\lambda_1)^{-2}+2(\lambda_1)^{-3}\right]+\Theta(t-\tau)\exp(\lambda_1(t-\tau))\left[(t-\tau)(\lambda_1)^{-2}-2(\lambda_1)^{-3}\right]= \tag{38}$$
$$=\Theta(t-\tau)\left\{(t-\tau)(\lambda_1)^{-2}\left[1+\exp(\lambda_1(t-\tau))\right]+2(\lambda_1)^{-3}\left[1-\exp(\lambda_1(t-\tau))\right]\right\}.$$

Легко видеть, что $f_7(t)=\psi(t,0)$. Отсюда следует, что

$$f_7(t)=\psi(t,0)=\Theta(t)\left\{t(\lambda_1)^{-2}\left[1+\exp(\lambda_1 t)\right]+2(\lambda_1)^{-3}\left[1-\exp(\lambda_1 t)\right]\right\}, \tag{39}$$

$$f_8(t)=\frac{\partial\psi(t,0)}{\partial t}=\Theta(t)\left\{(\lambda_1)^{-2}\left[1+\exp(\lambda_1 t)\right]+t(\lambda_1)^{-1}\exp(\lambda_1 t)-2(\lambda_1)^{-2}\exp(\lambda_1 t)\right\}=$$
$$=\Theta(t)\left\{(\lambda_1)^{-2}\left[1-\exp(\lambda_1 t)\right]+t(\lambda_1)^{-1}\exp(\lambda_1 t)\right\}. \tag{40}$$

$$f_9(t)=\frac{\partial^2\psi(t,0)}{\partial t^2}=\Theta(t)t\exp(\lambda_1 t). \tag{41}$$

Совершенно аналогично для оставшихся четырех интегралов имеем:

$$f_{10}(t)=\Theta(t-\tau)\left\{(t-\tau)(\lambda_1)^{-2}\left[1+\exp(\lambda_1(t-\tau))\right]+2(\lambda_1)^{-3}\left[1-\exp(\lambda_1(t-\tau))\right]\right\}, \tag{42}$$

$$f_{11}(t)=\frac{\partial\psi(t,\tau)}{\partial t}=\Theta(t-\tau)\cdot\left\{(\lambda_1)^{-2}\left[1-\exp(\lambda_1(t-\tau))\right]+(t-\tau)(\lambda_1)^{-1}\exp(\lambda_1(t-\tau))\right\}, \tag{43}$$

$$f_{12}(t)=\frac{\partial^2\psi(t,\tau)}{\partial t^2}=\Theta(t-\tau)\cdot(t-\tau)\cdot\exp(\lambda_1(t-\tau)), \tag{44}$$

$$f_{13}(t)=\frac{\partial^3\psi(t,\tau)}{\partial t^3}=\Theta(t-\tau)\cdot\left\{\exp(\lambda_1(t-\tau))+(t-\tau)\lambda_1\exp(\lambda_1(t-\tau))\right\}. \tag{45}$$

Имея набор вспомогательных интегралов, мы можем произвести обратное преобразование Лапласа и вычислить искомые функции $\kappa_i(t)$, $\eta_i(t)$.

Вначале рассмотрим функцию

$$\tilde{\kappa}_1(\lambda)=\frac{(\lambda\exp(\lambda\vartheta)+k)Y(0)+(\mu/\vartheta)(\exp(\lambda\vartheta)-1)K(\vartheta)}{\Delta(\lambda)} \tag{46}$$

Представим ее в виде

$$\tilde{\kappa}_i(\lambda)=\sum_{j=1}^{3}\tilde{\kappa}_{ij}(\lambda), \tag{47}$$

где при $i=1$

$$\tilde{\kappa}_{1j}(\lambda)=\left[(\lambda\exp(\lambda\vartheta)+k)Y(0)+(\mu/\vartheta)(\exp(\lambda\vartheta)-1)K(\vartheta)\right]D_j(\lambda). \tag{48}$$

Рассмотрим лапласовский образ

$$\tilde{\kappa}_{11}(\lambda)=\frac{\lambda Y(0)+\mu K(\vartheta)/\vartheta}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}+\frac{kY(0)-\mu K(\vartheta)/\vartheta}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)}\exp(-\lambda\vartheta). \tag{49}$$

Соответствующий лапласовский оригинал имеет вид

$$\kappa_{11}(t)=Y(0)\cdot\varphi(t,0)+\left[\mu K(\vartheta)/\vartheta\right]\cdot\varphi(t,0)+\left[kY(0)-\mu K(\vartheta)/\vartheta\right]\varphi(t,\vartheta). \tag{50}$$

Лапласовский образ второго слагаемого согласно (48), (21) определяется соотношением

$$\tilde{\kappa}_{12}(\lambda) =$$

$$= \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \left[(\lambda \exp(\lambda\vartheta) + k)Y(0) + (\mu/\vartheta)(\exp(\lambda\vartheta) - 1)K(\vartheta)\right] \cdot \frac{\exp(-\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2} = \tag{51}$$

$$= \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \left\{\left[\frac{\lambda Y(0) + \mu K(\vartheta)/\vartheta}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}\right] + \left[\frac{kY(0) - \mu K(\vartheta)/\vartheta}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}\right]\exp(-\lambda\vartheta)\right\},$$

откуда

$$\kappa_{12}(t) = \frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \left\{Y(0) \cdot \dot{\psi}(t,0) + \left[\mu K(\vartheta)/\vartheta\right] \cdot \psi(t,0) + \left[kY(0) - \mu K(\vartheta)/\vartheta\right] \cdot \psi(t,\vartheta)\right\}. \tag{52}$$

По аналогии имеем

$$\tilde{\kappa}_{13}(\lambda) =$$

$$= \frac{k\lambda\vartheta + (\alpha + k\vartheta)\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \left[(\lambda \exp(\lambda\vartheta) + k)Y(0) + (\mu/\vartheta)(\exp(\lambda\vartheta) - 1)K(\vartheta)\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{\exp(-2\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2} =$$

$$= \frac{k\lambda\vartheta + (\alpha + k\vartheta)\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \tag{53}$$

$$\cdot \left\{\left[\frac{(\lambda Y(0) + \mu K(\vartheta)/\vartheta) \cdot \exp(-\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}\right] + \left[\frac{(kY(0) - \mu K(\vartheta)/\vartheta)\exp(-2\lambda\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}\right]\right\} \approx$$

$$\approx \frac{k\lambda\vartheta + (\alpha + k\vartheta)\mu(1-c)}{\vartheta} \cdot \left[\frac{(\lambda Y(0) + \mu K(\vartheta)/\vartheta)}{(\lambda-\lambda_0)^2(\lambda-\lambda_1)^2}\right] \cdot \exp(-\lambda\vartheta).$$

Слагаемое, содержащее экспоненту $\exp(-2\lambda\vartheta)$, было отброшено, поскольку соответствующий оригинал отличен от нуля только при временах $t > 2\vartheta$. Прогнозы на столь отдаленную перспективу бессмысленны в принципе. В самом деле, если инвестиционный проект рассчитан на 5 лет, то логично оценить отдачу от проекта приблизительно еще на 5 лет после запуска производства. Очевидно, что расчет экономического развития производства на 10 лет вперед, начиная с момента окончания внешних инвестиционных «вливаний», особого смысла не имеет.

С учетом сделанного замечания получаем

$$\kappa_{13}(t) \approx kY(0)\dot{\psi}(t,\vartheta) + \frac{k\mu K(\vartheta) + (\alpha + k\vartheta)\mu(1-c)Y(0)}{\vartheta}\psi(t,\vartheta) +$$
$$+ \frac{(\alpha + k\vartheta)\mu(1-c) \cdot \mu K(\vartheta)/\vartheta}{\vartheta}\psi(t,\vartheta). \tag{54}$$

Совершенно аналогично вычисляются функции $\kappa_{2i}(t)$. В частности:

$$\kappa_{21}(t) = \mu \cdot \left[\dot{\varphi}(t,0) + k\varphi(t,\vartheta)\right], \tag{55}$$

$$\kappa_{22}(t) = \frac{\alpha\mu^2(1-c)}{\vartheta} \cdot \left[\dot{\psi}(t,0) + k \cdot \psi(t,\vartheta)\right], \tag{56}$$

$$\kappa_{23}(t) \approx k\mu\dot{\psi}(t,\vartheta) + \frac{(\alpha + k\vartheta)\mu^2(1-c)Y(0)}{\vartheta}\psi(t,\vartheta). \tag{57}$$

Функции времени $\kappa_{3i}(t)$ имеют вид

$$\kappa_{31}(t) = -\frac{\mu}{\vartheta} \cdot \left[\dot{\varphi}(t,0) + k \cdot \varphi(t,0)\right], \tag{58}$$

$$\kappa_{32}(t) = -\frac{\alpha\mu^2(1-c)}{\vartheta^2} \cdot \left[\dot{\psi}(t,0) + k \cdot \psi(t,0)\right], \tag{59}$$

$$\kappa_{33}(t) \approx -\frac{\mu}{\vartheta}\cdot\left[k\ddot{\psi}(t,\vartheta)+\frac{(\alpha+k\vartheta)\mu(1-c)}{\vartheta}\dot{\psi}(t,\vartheta)+\frac{k(\alpha+k\vartheta)\mu(1-c)}{\vartheta}\psi(t,\vartheta)\right].$$

Точно также вычисляются функции $\kappa_{4j}(t)$:

$$\kappa_{41}(t)=\frac{\mu}{\vartheta}\cdot[\varphi(t,0)-\varphi(t,\vartheta)], \tag{60}$$

$$\kappa_{42}(t)=\frac{\alpha\mu^2(1-c)}{\vartheta^2}\cdot[\psi(t,0)-\psi(t,\vartheta)], \tag{61}$$

$$\kappa_{43}(t)\approx\frac{k\mu}{\vartheta}\dot{\psi}(t,\vartheta)+\frac{(\alpha+k\vartheta)\mu^2(1-c)}{\vartheta^2}\psi(t,\vartheta). \tag{62}$$

Алгоритм вычисления функций $\eta_i(t)$ полностью аналогичен алгоритму расчета функций $\kappa_i(t)$. В связи с этим мы представим каждую их этих функций в виде суммы трех слагаемых:

$$\eta_i(t)=\sum_{j=1}^{3}\eta_{ij}(t). \tag{63}$$

В свете приведенной аргументации ниже мы приводим только окончательные выражения для всех слагаемых $\eta_{ij}(t)$:

$$\eta_{11}(t)=K(\vartheta)\cdot\dot{\varphi}(t,\vartheta)+[\alpha(1-c)Y(0)+\mu(1-c)K(\vartheta)]\cdot\varphi(t,\vartheta), \tag{64}$$

$$\eta_{12}(t)=\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\cdot\{K(\vartheta)\cdot\dot{\psi}(t,\vartheta)+[\alpha(1-c)Y(0)+\mu(1-c)K(\vartheta)]\cdot\psi(t,\vartheta)\}, \tag{65}$$

$$\eta_{13}(t)\approx 0, \tag{66}$$

$$\eta_{21}(t)=\alpha\mu(1-c)\cdot\varphi(t,\vartheta), \tag{67}$$

$$\eta_{22}(t)=\frac{\alpha^2\mu^2(1-c)^2}{\vartheta}\cdot\psi(t,\vartheta). \tag{68}$$

$$\eta_{23}(t)\approx 0, \tag{69}$$

$$\eta_{31}(t)=\ddot{\varphi}(t,0)+\mu(1-c)\dot{\varphi}(t,0)-\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\varphi(t,0), \tag{70}$$

$$\eta_{32}(t)=\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\cdot\left[\ddot{\psi}(t,0)+\mu(1-c)\dot{\psi}(t,0)-\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\psi(t,0)\right], \tag{71}$$

$$\eta_{33}(t)=k\cdot\ddot{\psi}(t,\vartheta)+\mu(1-c)\left(2k+\frac{\alpha}{\vartheta}\right)\cdot\dot{\psi}(t,\vartheta)-\frac{\alpha}{\vartheta}k\mu(1-c)\cdot\dot{\psi}(t,\vartheta)-$$
$$-\frac{\mu^2(1-c)^2\alpha(\alpha+k\vartheta)}{\vartheta^2}\cdot\psi(t,\vartheta), \tag{72}$$

$$\eta_{41}(t)=\dot{\varphi}(t,\vartheta)+\mu(1-c)\cdot\varphi(t,\vartheta), \tag{73}$$

$$\eta_{42}(t)=\frac{\alpha\mu(1-c)}{\vartheta}\cdot[\dot{\psi}(t,\vartheta)+\mu(1-c)\cdot\psi(t,\vartheta)], \tag{74}$$

$$\eta_{43}(t)\approx 0. \tag{75}$$

Таким образом, мы нашли приближенные аналитические выражения для всех функций, фигурирующих в формальном решении задачи (1). В отличие от точного решения (формулы (12) - (16)), полученные соотношения весьма удобны для численных расчетов. Именно это обстоятельство дает реальную возможность проведения обширного численного эксперимента с целью научно обоснованного прогнозирования экономической эффективности долгосрочных и среднесрочных инвестиционных проектов. Кроме того, на базе полученных соотношений достаточно просто решается задача оптимального управления решениями об инвестициях.

Заключение

Резюмируем вышесказанное следующим образом.

В настоящей работе получены следующие основные результаты:

1. Построено обобщение стохастической модели Гудвина-Калецкого на случай привлечения внешних инвестиций (система уравнений (1)).
2. Получено точное аналитическое решение системы уравнений (1).
3. Построено приближенное аналитическое решение указанной задачи, представляющее собой разложение точного решения по малому параметру $(\mu\vartheta)^{-1} << 1$.

Представляется интересным численное исследование полученных выражений, а также их сопоставление с результатами исследования аналогичной задачи в приближении «расторопного инвестора» [1].

Список литературы

1. Швидак А.И. Качественные методы анализа нестабильной экономики / СамИИТ, РАТ. Самара, 2000. 170 с.
2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. -М.: Наука, 1975. 494 с.