МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ

И.П. Завершинский, М.Э. Лисянский, В.В. Максимов, Ю.Л. Ратис

Введение

В настоящее время управление качеством выпускаемой продукции становится одной из главных задач топ-менеджеров предприятий. Дело в том, что в условиях рынка некачественная продукция, или продукция, качество которой существенно меняется от изделия к изделию, является абсолютно неконкурентоспособной. Предприятие, не справившееся с задачей стандартизации продукции и управления ее качеством, очень быстро становится нерентабельным и, в конце концов, обречено на банкротство.

С другой стороны, неоправданно большие затраты на создание и развитие системы управления качеством могут тяжким бременем лечь на бюджет предприятия. В любом деле приходится искать золотую середину. В данном случае - оптимальный уровень затрат на управление качеством продукции.

В рамках статических моделей такие оценки проводились многими авторами. Подробный обзор современного состояния проблемы можно найти в ИНТЕРНЕТе [1].

Целью настоящей работы является построение и исследование динамической модели, позволяющей оптимизировать затраты на систему управления качеством.

1. Синтез модели

На начальном этапе исследований логично принять за основу всесторонне апробированную модель Гудвина-Калецкого (подробности см. в [2-4]). Модифицируем ее для случая предприятия, на котором внедрена система управления качеством. Поскольку контроль качества – мероприятие достаточно дорогое, постольку этот фактор должен быть учтен как в доходной, так и в расходной частях баланса предприятия. В силу этого уравнение баланса, введенное и исследованное в работах [2-4], скорректируем следующим образом:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{Q}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Z}$ - спрос, $\mathbf{C}$ - потребительские расходы, $\mathbf{I}$ - инвестиционные расходы, $\mathbf{A}$ - независимые расходы, $\mathbf{Q}$ -расходы на управление качеством продукции.

В свою очередь каждое слагаемое в этом уравнении может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{B} = \alpha(\mathbf{1} - \mathbf{c})\mathbf{Y} - \kappa \cdot \mathbf{K}, \tag{2}$$

где $\mathbf{Y}$ - продукция предприятия, $\mathbf{K}$ - величина основного капитала предприятия, $\mathbf{B}$ - объем решений о капиталовложениях в предприятие, причем инвестиции связаны с решением о таковых уравнением

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} \mathbf{B}(\mathbf{t}')\mathbf{dt}', \tag{3}$$

где θ - время запаздывания. Потребительские расходы $\mathbf{C}$ предприятия связаны с произведенной продукцией $\mathbf{Y}$ стандартным соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Y}. \tag{4}$$

Величина основного капитала меняется с течением времени по закону

$$\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{B}(\mathbf{t} - \theta). \tag{5}$$

Кроме того, мы должны добавить зависимость между спросом и произведенным продуктом:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Z}\mu}{\widehat{\mathbf{D}} + \mu}, \tag{6}$$

где $\hat{D} = \frac{d}{dt}$ - дифференциальный оператор. Связь (6) описывает отставание произведенного продукта от величины спроса.

До сих пор мы использовали стандартную логику работ [2-4]. Учет влияния качества продукции на баланс предприятия осуществим следующим образом. Перепишем уравнение (6) в виде

$$Z = \left(\mu^{-1}\hat{D} + 1\right)Y \qquad (7)$$

Если учесть, что по самому своему смыслу величина Z представляет собой доходную часть баланса предприятия, то очевидно, что она должна являться функцией качества Q. Поэтому логично предположить, что влияние качества на доходы предприятия описывается уравнением

$$Z = \left(\mu^{-1}\hat{D} + 1\right)Y + \varphi(Q). \qquad (8)$$

Строго говоря, в рамках сделанных предположений величина Q зависит от всех экономических параметров, определяющих текущее состояние экономики «предприятия в целом». То есть $Q = Q\left(Y(t), \dot{Y}(t), K(t+\vartheta), K(t)\right)$. Однако в бюджете предприятия расходы на управление качеством, как правило, пропорциональны объему выпускаемой продукции. В силу этого на начальном этапе исследований разумно предположить, что

$$Q = \beta Y. \qquad (9)$$

После того как мы постулировали соотношение (9), система уравнений, описывающих экономику предприятия с учетом качества выпускаемой продукции, становится замкнутой:

$$\begin{cases} Z = C + I + A + Q, \\ B = \alpha \cdot (1 - c - \beta) \cdot Y - k \cdot K, \\ C = c \cdot Y, \\ I = \frac{1}{\theta} \int\limits_{t-\theta}^{t} B(t')dt', \\ \hat{D}K = B(t - \theta), \\ Z = \left(\mu^{-1}\hat{D} + 1\right)Y + \varphi(Q), \\ Q = \beta Y. \end{cases} \qquad (10)$$

В уравнениях (10) мы учли тот факт, что расходы на управление качеством производятся из общего бюджета предприятия.

С учетом сделанных замечаний система уравнений (10) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \mu\left\{\frac{1}{\vartheta}\left[K(t+\vartheta) - K(t)\right] + A(t) - (1 - c - \beta)Y(t) - \varphi\left(\beta Y(t)\right)\right\}, \\ \frac{dK(t+\vartheta)}{dt} = \alpha(1 - c - \beta)Y(t) - kK(t). \end{cases} \qquad (11)$$

Полученная нами система уравнений (11) дает основу для изучения динамики системы управления качеством и ее влияния на уровень рентабельности производства.

2. Задача оптимального управления качеством

В процессе организации экономической деятельности менеджеры предприятий, как правило, стремятся максимизировать прибыль. Поэтому естественно постулировать, что целевая функция, подлежащая максимизации, имеет вид

$$F(\beta) = \int\limits_0^T Z(t)dt = \mu^{-1}\left[Y(T) - Y(0)\right] + \int\limits_0^T Y(t)dt + \int\limits_0^T \varphi\left(\beta Y(t)\right)dt. \qquad (12)$$

Входящие в уравнения (1)-(12) константы α, β, c, k, θ и μ являются параметрами, подлежащими нахождению в процессе идентификации модели.

Особо остановимся на роли времен задержки μ и θ. Дело в том, что именно иерархия характерных времен эволюции системы определяет многие непривычные эффекты в динамических системах с запаздыванием.

Для того чтобы пролить дополнительный свет на роль инвестиционной истории экономического субъекта, подробнее остановимся на исследовании соотношения между инвестициями и капиталом:

$$\mathbf{I(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\theta}[\mathbf{K(t+\theta)} - \mathbf{K(t)}]. \tag{13}$$

Перепишем выражение (13) в следующем виде:

$$\mathbf{K(t+\theta)} = \mathbf{K(t)} + \mathbf{I(t)} \cdot \theta. \tag{14}$$

В указанной форме трактовка соотношения (14) становится абсолютно прозрачной - капитал в момент времени $t+\theta$ складывается из капитала в момент времени t и инвестиционных "вливаний" $\mathbf{I(t)} \cdot \theta$. Если время θ, за которое осуществляются инвестиции, мало, то выражение (13) можно разложить в ряд Тейлора по параметру θ и ограничиться нулевым членом ряда.

В современных условиях жесткой конкуренции системы управления качеством вводятся очень быстро. Поэтому логично на первом этапе исследований ограничиться приближением «расторопного инвестора», в рамках которого считается, что $\vartheta \to 0$. В этом приближении система уравнений (12) сильно упрощается и превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dt}} = \mu\{(\alpha-\mathbf{1})(\mathbf{1}-\mathbf{c}-\beta)\mathbf{Y(t)} - \mathbf{kK(t)} + \mathbf{A(t)} - \varphi(\beta\mathbf{Y(t)})\}, \\ \dfrac{\mathbf{dK(t)}}{\mathbf{dt}} = \alpha(\mathbf{1}-\mathbf{c}-\beta)\mathbf{Y(t)} - \mathbf{kK(t)}, \end{cases} \tag{15}$$

анализ свойств которой производится стандартными методами.

О характере зависимости $\varphi(\mathbf{Q})$ следует сделать следующие предположения:

1) при $\beta = \mathbf{0}$ величина $\varphi = 0$;

2) при $\beta \to \mathbf{1}-\mathbf{c}$ $\varphi \to \mathbf{0}$, причем зануление функции качества наступает гораздо раньше, чем мы подходим к необходимости расходовать на систему управления качеством доходы от всей товарной продукции предприятия;

3) функция $\varphi(\mathbf{Q} = \beta\mathbf{Y})$ имеет максимум при $\mathbf{0} < \beta < \kappa(\mathbf{1}-\mathbf{c})$, причем на основании экспертных оценок $\mathbf{0.05} < \kappa < \mathbf{0.3}$;

4) характер зависимости $\varphi(\mathbf{Q})$ нелинейный;

5) для оценок годится приближение, в котором функция $\varphi = \varphi(\mathbf{Q})$ аппроксимируется некоторым выражением, естественные требования к которому будут сформулированы несколько ниже.

Исследуем асимптотическое поведение решения системы уравнений (15) в предположении о постоянстве независимых расходов($\mathbf{A} = \mathbf{const}$).

Очевидно, что в состоянии динамического равновесия выпуск продукции в единицу времени и величина основного капитала связаны с независимыми расходами простыми соотношениями:

$$\begin{cases} \mathbf{Y} + \varphi(\beta\mathbf{Y}) = (\mathbf{1}-\mathbf{c}-\beta)^{-1} \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{K} = \alpha \cdot (\mathbf{1}-\mathbf{c}-\beta)\mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{Y}. \end{cases} \tag{16}$$

Учитывая ограниченную точность исследуемой модели, найдем решение системы уравнений (16) методом последовательных приближений, ограничившись одной итерацией:

$$
\begin{aligned}
&Y_\infty \approx Y_\infty^{(0)} - \varphi(\beta Y_\infty^{(0)}),\\
&Y_\infty^{(0)} = \frac{1}{(1-c-\beta)}\cdot A,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
K_\infty = \frac{\alpha\cdot(1-c-\beta)}{k}\cdot Y_\infty . \tag{18}
$$

Соотношения (17), (18) дают основу для экспертных статических блиц-оценок оптимальных затрат на систему управления качеством без привлечения информации о динамике экономики исследуемого предприятия.

3. Динамика системы и метод последовательных приближений

Решение системы уравнений (15), строго говоря, можно отыскать, только зная явный вид функции $\varphi(Q)$. Однако для многих интересующих нас классов функций $\varphi(Q)$ задача существенно упрощается. Приближенное решение системы уравнений (15) для произвольного момента времени t также можно отыскать методом последовательных приближений.

Для этого преобразуем эту систему в систему интегральных уравнений типа Вольтера. В этих целях преобразуем систему (15) к следующему виду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dY}{dt} - \mu\{(\alpha-1)(1-c-\beta)Y(t) - kK(t)\} = \mu\{A(t) - \varphi(\beta Y(t))\},\\[2mm]
\dfrac{dK(t)}{dt} - \alpha(1-c-\beta)Y(t) + kK(t) = 0.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Характеристическое уравнение для системы (19) имеет вид

$$
\lambda^2 + 2\zeta_1\lambda + \zeta_2 = 0 . \tag{20}
$$

где $2\zeta_1 = \mu(1-\alpha)(1-c) + k, \zeta_2 = k\mu(1-c)$. Уравнение (20) имеет корни

$$
\lambda_{1,2} = -\zeta_1 \pm \sqrt{(\zeta_1)^2 - \zeta_2} . \tag{21}
$$

Если в начальный момент времени выпуск продукции $Y(t=0) = Y(0)$ и величина основного капитала $K(t=0) = K(0)$ заданы, то система (19) преобразуется в систему интегральных уравнений:

$$
\begin{cases}
Y(t) = C_1(t)\cdot\exp(\lambda_1 t) + C_2(t)\cdot\exp(\lambda_2 t),\\[2mm]
K(t) = -C_1(t)\cdot\dfrac{a_1+\lambda_1}{b_1}\exp(\lambda_1 t) - C_2(t)\cdot\dfrac{a_1+\lambda_2}{b_1}\exp(\lambda_2 t),
\end{cases}
\tag{22}
$$

где использованы сокращенные обозначения $a_1 = \mu(1-\alpha)(1-c-\beta)$, $b_1 = k\mu$, причем

$$
\begin{cases}
C_1(t) = \dfrac{\mu(a_1+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\displaystyle\int_0^t d\tau\left[A(\tau) - \varphi(\beta Y(t))\right]\exp(-\lambda_1\tau) + \dfrac{Y(0)(a_1+\lambda_2)+b_1K(0)}{\lambda_2-\lambda_1},\\[4mm]
C_2(t) = \dfrac{\mu(a_1+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\displaystyle\int_0^t d\tau\left[A(\tau) - \varphi(\beta Y(t))\right]\exp(-\lambda_2\tau) + \dfrac{Y(0)(a_1+\lambda_1)+b_1K(0)}{\lambda_1-\lambda_2}.
\end{cases}
\tag{23}
$$

В приближении «нулевого качества» (функция качества равна нулю) коэффициенты $C_i(t)$ определяются соотношениями:

$$
\begin{cases}
C_1^{(0)}(t) = \dfrac{\mu(a_1+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\displaystyle\int_0^t d\tau A(\tau)\exp(-\lambda_1\tau) + \dfrac{Y(0)(a_1+\lambda_2)+b_1K(0)}{\lambda_2-\lambda_1},\\[4mm]
C_2^{(0)}(t) = \dfrac{\mu(a_1+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\displaystyle\int_0^t d\tau A(\tau)\exp(-\lambda_2\tau) + \dfrac{Y(0)(a_1+\lambda_1)+b_1K(0)}{\lambda_1-\lambda_2}.
\end{cases}
\tag{24}
$$

Если для решения системы уравнений (19) мы используем метод последовательных приближений, то на n-й итерации приближенное решение имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
Y^{(n)}(t) = C_1^{(n)}(t) \cdot \exp(\lambda_1 t) + C_2^{(n)}(t) \cdot \exp(\lambda_2 t), \\
K^{(n)}(t) = -C_1^{(n)}(t) \cdot \dfrac{a_1 + \lambda_1}{b_1} \exp(\lambda_1 t) - C_2^{(n)}(t) \cdot \dfrac{a_1 + \lambda_2}{b_1} \exp(\lambda_2 t),
\end{cases} \tag{25}
$$

где

$$
\begin{cases}
C_1^{(n)}(t) = \dfrac{\mu(a_1 + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \int\limits_0^t d\tau\left[A(\tau) - \varphi\left(\beta Y^{(n-1)}(t)\right)\right]\exp(-\lambda_1 \tau) + \dfrac{Y(0)(a_1 + \lambda_2) + b_1 K(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\
C_2^{(n)}(t) = \dfrac{\mu(a_1 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \int\limits_0^t d\tau\left[A(\tau) - \varphi\left(\beta Y^{(n-1)}(t)\right)\right]\exp(-\lambda_2 \tau) + \dfrac{Y(0)(a_1 + \lambda_1) + b_1 K(0)}{\lambda_1 - \lambda_2}.
\end{cases} \tag{26}
$$

Скорость сходимости итерационного процесса зависит от вида функции $\varphi(Q)$. Однако, если учесть, что при идентификации модели вид функции определяется $\varphi(Q)$ не только «экспериментальными данными», но и авторским произволом, то совершенно очевидно, что конкретную функциональную зависимость всегда можно подобрать так, чтобы итерационный процесс был сходящимся. Это связано с тем, что теорема о неподвижной точке применительно к системе уравнений (19) выполняется для весьма широкого класса функций $\varphi(Q)$, из которых и следует выбирать подходящий малопараметрический аппроксимант. На практике скорость сходимости выражений (25), (26) при $n \to \infty$ достаточно просто исследуется численными методами. Однако при исследовании аналитических свойств решения мы вынуждены ограничиваться одной итерацией ($n = 1$). Именно в этом приближении естественно искать оптимальное значение «параметра качества» β_{opt} из условия максимума целевой «функции качества» $F(\beta)$.

Очевидно, что решение системы (22), даваемое соотношениями (25), (26), является наиболее приемлемым с точки зрения экономиста в том случае, когда $\zeta_1 > 0$, $(\zeta_1)^2 < \zeta_2$, причем начальные значения производства продукции и капитала меньше равновесных значений $Y_\infty > Y(0)$, $K_\infty > K(0)$.

При этом экономическая система приближается к состоянию равновесия, совершая вокруг него малые затухающие колебания. То есть мы имеем дело с типичным переходным процессом в квазилинейной системе.

Величина $\Delta F = F(\beta_{opt}) - F(\beta = 0)$ определяет экономический выигрыш от внедрения системы управления качеством, а характер стремления $Y \to Y_\infty$, $K \to K_\infty$ дает представление о скорости экономической отдачи от инвестиций в эту систему управления.

Заключение

Полученные в работе соотношения дают основу для проведения вычислительного эксперимента, позволяющего смоделировать работу динамической системы управления качеством.

Интересно продолжить исследования в направлении оптимального выбора функции $\varphi(Q)$, численного исследования модели и внедрения системы динамического управления качеством продукции на действующем предприятии.

Список литературы

1. http://www.rambler.ru/ISO9000.htm/
2. Goodwin R.M., The non-linear accelerator and the Persistence of Business Cycles// Econometrica, 1951, №19, p1-17.
3. Kalecki M., Theory of Economic Dynamics// Allen and Unwin, 1954.
4. Швидак А.И. Качественные методы анализа нестабильной экономики / СамИИТ, РАТ. Самара, 2000. 170 с.