

сования с КУ на границе устойчивости $Z_{\delta r}^{-1} = R^{-1} = Y_{згр}$ при помощи соотношения

$$d_r = \sqrt{\frac{4a G_0 V}{\pi k \rho_{30} x_0 (F - f)}}$$

и не может быть меньше этой величины.

Л и т е р а т у р а

1. Ш о р и н В.П. Устранение колебаний в авиационных трубопроводах. - М.:Машиностроение, 1980. - 156 с.
2. Неустойчивость горения в ЖРД / Под ред. Харрье Д.Т. и Рирдона Ф.Г. - М.:Мир, 1975. - 870 с.
3. Г л и к м а н Б.Ф. Автоматическое регулирование ЖРД. - М.: Машиностроение, 1974. - 396 с.
4. С в е р б и л о в В.Я., Ш о р и н В.П., А н и с и м - к и н Ю.С. Обеспечение устойчивости систем регулирования давления газа коррекцией динамических характеристик трубопроводных цепей. - В сб.: Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. - Куйбышев: КуАИ, 1981. Вып.8, с.94-100.

УДК 62-501

Н.П.Ш у м с к и й

УРАВНЕНИЯ И ДИАГРАММЫ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ 4-го И 5-го ПОРЯДКОВ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Изучение сложных систем, тем более проблем управления процессами высокой сложности, требует на первом исходном этапе проектирования их упрощения. В этом случае особую роль приобретают различные асимптотические методы, сводящие систему к грубой модели. Метод разделения движений высокой размерности на подсистемы более низкого порядка позволяет исследовать каждую из них независимо друг от друга. Анализ многомерных систем показал, что на первом этапе проектирования и решения ряда технических задач в процессе доводки и оценки их работоспособности исследования

таких систем можно проводить по упрощенной линейной модели 4-го и 6-го порядков, что имеет место на практике, а также при разработке САПР. Линейный анализ во многих случаях сам по себе представляет интерес, во-первых, потому, что с помощью линейного анализа выявляются главные и существенные параметры системы, определяющие настроечные параметры регулятора; во-вторых, потому, что его результаты определяют границу применимости того или иного нелинейного анализа; в-третьих, он указывает на степень влияния нелинейностей в автоматических системах, что как раз и устанавливается при сопоставлении результатов линейного и нелинейного анализов.

Предметом исследования линейных динамических систем управления и автоматического регулирования является уравнение движения [1]

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \tau_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \tau_1 \frac{dx}{dt} + \tau_0 x = 0, \quad (1)$$

где x - регулируемая величина; τ_i - постоянные коэффициенты; t - время.

Это уравнение можно привести к безразмерному, так называемому нормированному виду

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (2)$$

Параметры A_i , безразмерное время τ и частота собственных движений системы ω_0 определяются равенствами

$$A_{n-k} = \frac{\tau_{n-k}}{\sqrt{\tau_0^k \tau_n^{n-k}}}; \quad \tau = \frac{t}{t_0}; \quad t_0 = \sqrt{\frac{\tau_n}{\tau_0}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{t_0} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_n}}.$$

Рассмотрим систему 4-го порядка. В этом случае $n = 4$ и уравнение (2) обращается в следующее:

$$\frac{d^4 x}{d\tau^4} + A_3 \frac{d^3 x}{d\tau^3} + A_2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + A_1 \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что коэффициенты исходного уравнения (1) положительны; и тогда условия Гурвица для уравнения (2) (положительность коэффициентов и определителя третьего порядка $\Delta_3 > 0$) дают $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$

$$A_1(A_2 A_3 - A_1) > A_3^2. \quad (4)$$

Поскольку правая часть (4) существенно положительная величина, а $A_1 > 0$, то $A_2 A_3 - A_1 > 0$. Поэтому соотношение (4) на границе устойчивости можно представить в виде

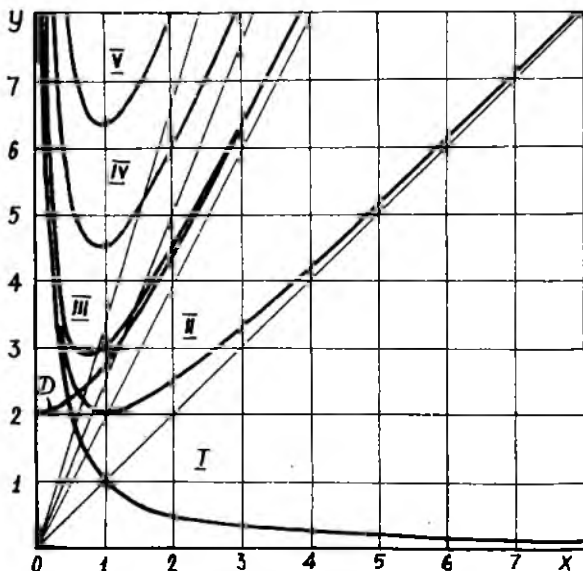
$$y = \frac{1}{x} + x,$$

$$\text{где } x = \frac{A_1}{A_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \sqrt{\frac{\tau_4}{\tau_0}}, \quad y = A_2 = \frac{\tau_2}{\sqrt{\tau_0 \tau_4}}.$$

(5)

(6)

Полученное уравнение (5) представляет собой критерий устойчивости систем четвертого порядка в пространстве безразмерных комплексов χy и отображает на плоскости кривую Вышнеградского, одна ветвь которой сдвинута и повернута относительно оси симметрии $y=x$ на угол $\pi/4$, являющейся ее асимптотой (рис.1). Кривая (5) имеет экстремальную точку $x=1, y=2$, определяемую условием $\frac{dy}{dx} = 0$.



Р и с. 1. Обобщенная диаграмма устойчивости при различных значениях параметра β_0 ; области устойчивости для следующих систем: I - $y = \frac{1}{x}$ 3-го порядка; II - $y = \frac{1}{x} + x$ 4-го порядка; III - $y = \frac{1}{x} + 2x$ 5-го порядка; $\beta_0 = 1$ } $y = \sqrt{\beta_0} [\frac{1}{x} + (1 + \frac{1}{\beta_0})x]$; IV - $y = 2$ 5-го порядка $\beta_0 = 4$ }

САР 5-го порядка. Дальнейшее расширение описания физической модели САР приводит к системам уравнений 5-го порядка. При $n = 5$ уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d^5 x}{dt^5} + A_4 \frac{d^4 x}{dt^4} + A_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + A_1 \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (7)$$

Для устойчивости САР 5-го порядка (7) по Гурвицу требуется положительность коэффициентов и определителей второго $\Delta_2 > 0$ и четвертого порядка $\Delta_4 > 0$:

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, A_4 > 0, A_3 A_4 - A_2 > 0, \quad (8)$$

$$(A_3 A_4 - A_2)(A_1 A_2 - A_3) > (A_1 A_4 - 1)^2. \quad (9)$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что правая часть (9) - существенно положительная величина и поскольку $A_3 A_4 - A_2 > 0$, то $A_1 A_2 - A_3 > 0$.

Поэтому введем следующие существенные параметры задачи

$$x^2 = \frac{A_1 A_2}{A_3} - 1; \quad y^2 = A_2 A_3; \quad \beta_0 = \frac{A_3 A_4}{A_2} - 1. \quad (10)$$

В пространстве этих координат (x, y, β_0) граница устойчивости принимает следующую форму

$$y = \sqrt{\beta_0} \left[\frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right) x \right], \quad (11)$$

где $\beta_0 > 0$ характеризует первое условие Гурвица ($\Delta_2 > 0$).

В пространстве коэффициентов τ_i для x, y, β_0 верны формулы

$$x^2 + 1 = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_0 \tau_3}; \quad y^2 = \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_0 \tau_5}; \quad \beta_0 + 1 = \frac{\tau_3 \tau_4}{\tau_2 \tau_5}.$$

По установленному критерию (11) диаграмма устойчивости САР 5-го порядка представлена на рис. I.

Особенность этого уравнения состоит в том, что оно отражает семейство кривых $y = (x, y, \beta_0)$ с параметром β_0 , еще более сжатых к оси ординат, чем САР-4, причем, каждая кривая расположена между осью ординат и асимптотой $y = \frac{1 + \beta_0}{\sqrt{\beta_0}} x$, а все семейство ограничено дискриминантной кривой $y = 2\sqrt{1 + x^2}$, которая получается решением уравнений $\frac{\partial y}{\partial \beta_0} = 0$ и (11). Эта кривая представляет собой

гиперболу, симметричную относительно оси ординат с асимптотой $y = \pm 2x$. Все решения САР 5-го порядка ограничены этой кривой.

Из полученных соотношений следует, что если областью существования для САР 3-го порядка является весь квадрант $x > 0, y > 0$, то для систем 4-го порядка эта область стала в два раза меньше и ограничена осью ординат Oy ($x = 0$) и асимптотой кривой $y = x$, а для систем 5-го порядка еще в два раза меньше и расположена в секторе $x = 0, y = 2x$. Таким образом, с увеличением размерности физической системы область устойчивости линейной модели значительно уменьшается.

Из приведенного анализа следует, что САР 4-го порядка имеют два безразмерных комплекса x, y , а САР 5-го порядка — три — x, y, β_0 , характеризующих их динамические свойства. Эти существенные параметры и комплексы являются критериями подобия рассматриваемых систем и отражают их главные и наиболее существенные свойства и особенности и являются предметом выбора параметров настройки регулятора.

Помимо решения общих вопросов устойчивости САР и определения их запасов, удаления режима работы системы от границы устойчивости на основе критериальных соотношений (5), (II) можно проводить различного рода исследования САР.

Например, в ряде практических вопросов требуется определить влияние коэффициента усиления K на устойчивость систем с передаточными функциями вида

$$W(p) = K \frac{\tau_2' p^2 + \tau_1' p + 1}{p(\tau_4 p^3 + \tau_3 p^2 + \tau_2 p + 1)},$$

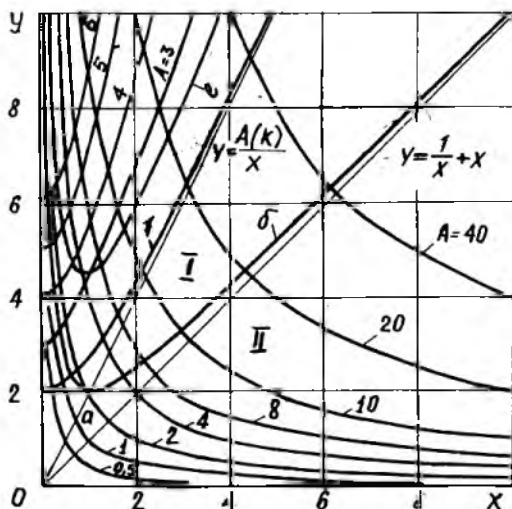
$$W(p) = K \frac{\tau}{p(\tau_5 p^4 + \tau_4 p^3 + \tau_3 p^2 + \tau_2 p + 1)}.$$

Поставленная задача решается на основании зависимостей параметров x, y от коэффициентов уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{САР-4 } y &= \frac{A}{x}; A = \frac{1}{K\tau_3} (1 + \tau_1' K)(\tau_2 + \tau_2' K) \\ \text{САР-5 } y &= A\sqrt{1+x^2}; A = \frac{\tau_3}{\sqrt{\tau_5(1+K\tau_1')}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Давая различные значения K , получим динамические траектории системы для всех $0 < K < \infty$. Это семейство гипербол, расположенных в области $x > 0, y > 0$. Однако только часть из них удовлетворяет условиям устойчивости системы (5), (II). При $A < 1$ система

неустойчива при всех значениях коэффициента усиления K (для САР-5 $A < 2$). При $A > 1$ (для САР-5 $A > 2$) система допускает устойчивые и неустойчивые движения (рис.2).



Р и с. 2. Влияние коэффициента усиления K , $y = \frac{A(k)}{x}$ на устойчивость САР-4 и $y = A(k)\sqrt{1+x^2}$ САР-5: I - область устойчивости на плоскости $y > \frac{1}{x} + x$ и $y \geq \sqrt{\beta} \left[\frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)x \right]$ кривая 2, $\beta = 4$; II - область неустойчивости $y < \frac{1}{x} + x$; $y = \frac{1}{x}$ - диаграмма устойчивости для САР-3 (а); $y = \frac{1}{x} + x$ - диаграмма устойчивости САР-4 (б); $y > 2\sqrt{1+x^2}$ - область решений САР-5, $A = 2, 3, 4, 5, 6$ (в)

Полученные результаты имеют важное практическое значение для построения оптимальных систем. В этом случае, согласно функциям Баттерворта [6], запасы устойчивости, конструктивные и физические параметры оптимальных САР 4-го и САР 5-го порядков определяются равенствами:

$$а) x = \frac{\tau_1}{\tau_3} \sqrt{\frac{\tau_4}{\tau_0}} = 1, \quad y = \frac{\tau_2}{\sqrt{\tau_0 \tau_4}} = 3,414;$$

$$6) x = \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_0 \tau_3}} = 1,497, \quad y = \sqrt{\frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_0 \tau_5}} = 5,236, \quad \beta_0 + 1 = \frac{\tau_3 \tau_4}{\tau_2 \tau_5} = 3,236$$

Влияние нелинейностей в САР - 4. Для весьма широкого круга нелинейных автоматических систем, встречающихся в технике и научно-технической литературе, нелинейная модель системы может быть представлена в виде [2]

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (13)$$

В общем случае многочлены $Q(p)$ и $R(p)$ любой степени $n, \nu, \nu \leq n$. Для рассматриваемых систем они имеют вид

$$Q(p) = \tau_5 p^5 + \tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + p_1, \quad (14)$$

$$R(p) = T_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + T_1 p + p_2,$$

$F(x, px)$ - нелинейная функция.

Применяя к анализу (13) метод гармонического баланса, условия которого здесь выполняются, после представления нелинейной функции $F(x, px)$ ее линейным выражением через гармонические коэффициенты усиления q и q' [2]

$$F(x, px) = [q(A, \omega) + \frac{1}{\omega} q'(A, \omega)]x,$$

где A, ω - амплитуда и частота.

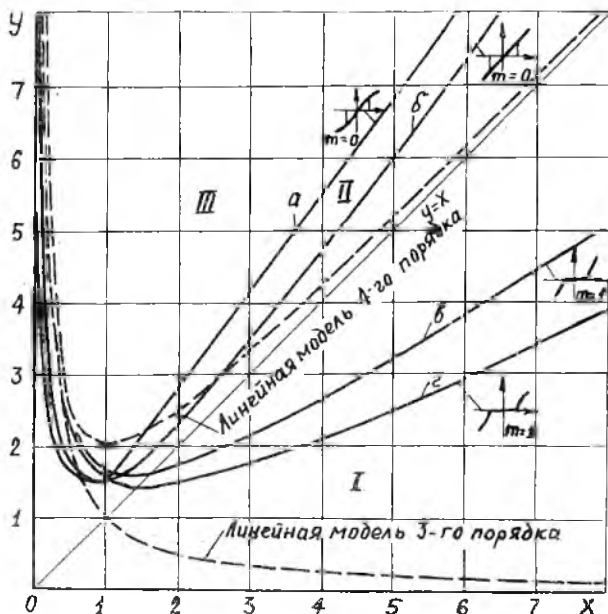
На основе соотношений (5), (11) получим уравнение границы устойчивости нелинейных САР 4-го порядка

$$y = \frac{B}{x} + cx, \quad (15)$$

где $B = B(\alpha_i, q, q')$, $C = C(\alpha_i, q, q')$, $\alpha_i = \frac{T_i}{\tau_i}$ отражают влияние как однозначных, так и неоднозначных нелинейностей на устойчивость и процесс регулирования САР-4.

Выражения q и q' для обобщенной нелинейности, из которого следует большинство частных случаев САР, даны автором в [3]. Полученное соотношение (15) представляет собой обобщенную диаграмму устойчивости нелинейных систем 4-го порядка и позволяет проводить анализ влияния нелинейностей для различных структур передаточных функций, выявить существенные особенности их воздействия на динамику системы регулирования, сравнить нелинейную модель с линейной. Кроме того, это соотношение позволяет выделить области устойчивости и неустойчивости (Ш, I), а также область устойчивых и

неустойчивых периодических движений и область автоколебаний II) (рис.3).



Р и с. 3. Диаграмма устойчивости модели 4-го порядка при наличии нелинейных характеристик в гидравлическом сервомоторе: квадратичное трение (а); срывное трение (б); зона нечувствительности и нелинейное или линейное истечение (турбулентный и ламинарный режимы) (в, г)

В случае отсутствия нулей в передаточной функции системы, получим

$$y = \frac{\gamma}{x} + \frac{q}{\gamma} x, \quad \text{где } \gamma = 1 + \alpha_{11} q'.$$

При учете только однозначной нелинейности $\gamma = I$ имеем

$$y = \frac{1}{x} + qx.$$

В таблице показаны соотношения устойчивости с однозначной нелинейностью САР с различной структурой передаточных функций при $\alpha_i = I$. (Для однократных систем последнее условие, как известно, является наиболее опасным в смысле устойчивости). Ана-

Т а б л и ц а

Структура передаточных функций	Условия устойчивости	
$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$	$\alpha_i = 1, \kappa_0 = 1$	$\alpha_i = 1, \kappa_0 = \infty$
$W_1(p) = \frac{T_3 p^3 + T_2 p^2 + T_1 p + \rho_2}{\tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + \rho_1}$	$y = \frac{2(q + \kappa_0)}{(1 + \kappa_0)(1 + q)} x + \frac{2}{1 + q} \frac{1}{x}$	$y = \frac{2}{1 + q} x + \frac{2}{1 + q} \frac{1}{x}$
$W_2(p) = \frac{T_2 p^2 + T_1 p + \rho_2}{\tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + \rho_1}$	$y = \frac{4(q + \kappa_0)}{(1 + \kappa_0)(1 + q)} x + \frac{1}{x}$	$y = \frac{4}{(1 + q)^2} x + \frac{1}{x}$
$W_3(p) = \frac{T_1 p + \rho_2}{\tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + \rho_1}$	$y = \frac{2(q + \kappa_0)}{(1 + \kappa_0)(1 + q)} x + \frac{1 + q}{2} \frac{1}{x}$	$y = \frac{2}{1 + q} x + \frac{1 + q}{2} \frac{1}{x}$
$W_4(p) = \frac{\rho_2}{\tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + \rho_1}$	$y = \frac{q + \kappa_0}{1 + \kappa_0} x + \frac{1}{x}$	$y = x + \frac{1}{x}$

ия полученных соотношений показывает: а) что обобщенная диаграмма устойчивости при $\nu = 3$ разбивается на области устойчивых и неустойчивых движений и области с различным характером периодических движений; б) при $\nu = 2, 1, 0$ нелинейные системы устойчивы в расширенной области по сравнению с линейной моделью (при $K_D = 0$ и $\varphi \leq 1$).

Следовательно, если структура передаточных функций линейной цепи такова, что показатель степени числителя передаточной функции $R(p)$ на два или более меньше, чем показатель степени знаменателя, т.е. когда $\nu = 2, 1, 0$, то такие нелинейные системы устойчивы в расширенной области по сравнению с линейной моделью, т.е. из устойчивости линейной модели следует устойчивость и нелинейной системы. Долгое время не удавалось расширить класс систем, для которых имеет место абсолютная устойчивость в Гурвицевом углу, больше, чем это было сделано Н.М.Труханом [4] для одноомкостных систем, т.е. для $\nu = 0$.

Однако из полученных результатов следует, что с точностью до метода гармонического баланса класс систем, удовлетворяющих условиям абсолютной устойчивости, значительно расширился ($\nu = 2, 1, 0$), включая и частный случай $\nu = 0$, рассмотренный в [4].

При наличии в системе дифференцирующего звена, т.е. нуля передаточной функции, введенные нелинейности сужают область устойчивости за счет появления устойчивых автоколебаний, за исключением последнего уравнения, когда поведение системы стремится к линейной модели. Такие системы не удовлетворяют условиям абсолютной устойчивости, что согласуется с результатами, полученными для систем 3-го порядка в [5].

Для нелинейных систем 4-го порядка с неоднозначной нелинейностью типична диаграмма устойчивости (рис.3), построенная на соотношении (15).

Таким образом, в работе установлены критерии устойчивости систем автоматического регулирования четвертого и пятого порядков в пространстве безразмерных комплексных параметров, по которым построены диаграммы устойчивости аналогично критерию и диаграмме устойчивости Вышнеградского для САР 3-го порядка.

Разработан метод исследования линейных и нелинейных систем на базе полученных результатов. Выводы исследования могут быть использованы при проектировании и доводке САР энергетических установок и исследований упрощенной модели многомерных систем автоматического управления (МСАУ).

Л и т е р а т у р а

1. П о п о в Е.П. Динамика систем автоматического регулирования. -М.:Гостехиздат, 1954.

2. П о п о в Е.П., П а л ь т о в И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. -М.:Физматгиз, 1960

3. Ш у м с к и й Н.П. и др. Исследование влияния различных видов трения в гидравлическом исполнительном устройстве в системах автоматического регулирования/ Под ред. Трапезникова В.А. - В кн.: Теория автоматического регулирования. -М.:Наука, 1972, с.74-79.

4. Т р у х а н Н.М. Об одноконтурных системах, абсолютно устойчивых в Гурвицевом углу. -Автоматика и телемеханика, 1966, № II

5. *Bzockett R.W., Willems J.L. Frequency domain Stability Criteria I IEEE Trans on Automat Control. V.AC-10, №4, 1965.*

6. *Battezworth S. Of the Theory of Filter amp ligiezs Wizeless Engeneez London, England, 1930, Vol. 7, p.p. 536-541.*