нии его в эксплуатации повысить регулярность и точность контроля системы регулирования двигателя, принимать рациональные решения при ее техническом обслуживании, снизить затраты времени и топлива.

УДК 536.244:534.213

И.П.Ревва, Р.Г.Галиуллин

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СТЕНКОЙ

Для решения проблем неустойчивости горения в энергетических установках, развития волновой техники, интенсификации технологических процессов представляют интерес динамические и тепловые явления при резонансных колебаниях газа в каналах с открытым концом /I/. Известно, что увеличение амплитуды колебаний газа приводит к образованию струйного истечения из открытого конца канала /2/. В работе ставится задача теоретического исследования резонансных колебаний газа и генерированных ими тепловых потоков в цилиндрическом канале с изотермической стенкой для случая, когда струйные потери с открытого конца намного превышают акустическое излучение.

Рассмотрим цилиндрический канал длиной L, радиусом $R \ll L$, один конец канала открыт, на другом колеблется поршень с амплитудой $l \ll L$ и частотой ω, близкой к собственной частоте канала.

Движение и теплообмен вязкого, сжимаемого и теплопроводного газа описываются уравнениями неразрывности, движения, энергии совместно с уравнением состояния идеального газа, записанными в цилиндрических координатах с осевой симметрией /I/.

Для случая $U/(\omega L) \ll 1$, где U – амплитуда колебаний скорости газа в канале, и $(\omega R)/U \ll 1$ решения системы уравнений ищутся в виде разложений по степеням малого параметра $\varepsilon \sim M^{1/2}$, где M – число Маха движения поршня, $M = \omega l / c_o$, c_o – скорость звука в невозмущенной среде /3/.

Граничное условие на поршне запишем в виде

$$u(x=0) = \omega l \cos \omega t, \tag{I}$$

где u – осевая компонента скорости; x – осевая координата.

Граничное условие на открытом конце должно отражать разрывной характер колебаний скорости, связанный с формированием пульсирующей струи за открытым концом. В фазе выброса часть массы воздуха, находящегося в канале, выбрасывается в окружающую среду безвозвратно. Всасывание происходит из областей, непосредственно прилегающих к открытому концу. В /3/ граничное условие на открытом конце сформулировано в виде

$$p(x=L)=\frac{1}{2}\rho_0\left\{\left[u(x=L)+aU\right]^2\right\}, \tag{2}$$

где p - колебания давления газа; фигурные скобки означают, что в окончательном выражении нужно опустить постоянные члены; a - параметр, характеризующий геометрию конца (для конца без кромки $a \cong \frac{1}{\pi}$). Граничные условия на стенке - это условия прилипания и изотермичности стенки.

Система уравнений первого порядка имеет вид

$$\rho_0\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)=0; \qquad \frac{\partial p_1}{\partial r}=0;$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_1)+\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]=0;$$

$$\rho_0 c_p\frac{\partial T_1}{\partial t}-\frac{\partial p_1}{\partial t}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)=0; \tag{3}$$

$$p_1-\rho_1 R_g T_0-\rho_0 R_g T_1=0,$$

где ρ, T - плотность и температура газа; μ - коэффициент динамической вязкости; c_p - теплоемкость при постоянном давлении; r - радиальная координата; v - радиальная компонента скорости; индексы означают порядок величин.

Решения системы (3), данные в /I/, содержат функции Бесселя первого порядка от аргумента $xi\sqrt{i}$ нулевого, первого и второго порядков.

В работе /4/ рассмотрен случай высокочастотных колебаний, когда толщина акустического пограничного слоя мала по сравнению с радиусом канала. Анализ показывает, что условие высокочастотности равносильно утверждению, что пограничный слой заметного влияния на ядро течения не сказывает. Оценка влияния пограничного слоя на ядро потока при больших, но конечных значениях параметра $H=R\sqrt{\omega/2\nu}$, где ν – коэффициент кинематической вязкости, дает следующие выражения, описывающие колебания термодинамических величин при $H \geq 10$:

$$p_1=C\cos(kx+\alpha)\exp(i\omega t),\quad u_1=-\frac{1}{\rho_0 c_0}C\sin(kx+\alpha)\left[1-\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\exp(-(1+i)H(1-\bar{r}))\right]\exp(i\omega t)$$

$$v_1\bar{r}=\frac{i+1}{2\rho_0 c_0^2}\,\frac{\omega R}{H}\left\{\left(\frac{\varkappa-1}{\sqrt{Pr}}+1\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\bar{r}^2\right)-\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\left[\exp(-(1+i)H(1-\bar{r}))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varkappa-1}{\sqrt{Pr}}\exp(-(1+i)H(1-\bar{r})\sqrt{Pr})\right]\right\}p_1; \tag{4}$$

$$\rho_1=\frac{1}{c_0^2}\left[1+(\varkappa-1)\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\exp(-(1+i)H\sqrt{Pr}(1-\bar{r}))\right]p_1,$$

$$T_1=\frac{1}{\rho_0 c_p}\left[1-\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\exp(-(1+i)H\sqrt{Pr}(1-\bar{r}))\right]p_1,$$

где C и α – коэффициенты, определяемые граничными условиями на концах канала; $\varkappa$ – показатель адиабаты; Pr – число Прандтля; $\bar{r}=r/R$; $k=\omega/c_0$ – волновое число.

Граничные условия первого порядка имеют вид

$$u_1(x=0)=0;\quad p_1(x=L)=0,$$

поэтому C определяется из граничных условий второго порядка

$$u_2(x=0)=\omega l\cos\omega t;\quad p_2(x=L)=(aC^2/\rho_0 c_0^2)\sin\omega t,$$

откуда $C=\rho_0 c_0^2(M/a)^{\frac{1}{2}}$.

Сравнение полученных результатов с аналогичными выражениями, справедливыми при $H\to\infty$ /4/ показывает, что учет влияния пограничного слоя на ядро потока приводит к появлению дополнительного члена в правой части выражения для радиальной компоненты скорости и не сказывается на колебаниях остальных термодинамических величин.

Приведем выражения (4) в безразмерному виду, полагая

$$\tilde{p}=\frac{p_1}{\rho_0 c_0^2 N};\ \tilde{u}=\frac{u_1}{c_0 Q};\ \tilde{v}=\frac{r v_1}{(\omega R^2/H)N};\ \tilde{\rho}=\frac{\rho_1}{\rho_0 N};\ \tilde{T}=\frac{T_1 c_p}{c_0^2 N};\ N=\left(\frac{M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cos kx;\ Q=\left(\frac{M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\sin kx,$$

и выделим их действительную часть. Получим

$$\tilde{p}=\cos\omega t,\quad \tilde{u}=\sin\omega t-\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\exp(-H(1-\bar{r}))\sin(\omega t-H(1-\bar{r}));$$

$$\tilde{v}=\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{Pr}}\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\bar{r}^{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)-\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\left[\exp(-H(1-\bar{r}))\cos(\omega t-H(1-\bar{r})+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{4})+\frac{x-1}{\sqrt{Pr}}\exp(-H\sqrt{Pr}(1-\bar{r}))\cos\left(\omega t-H\sqrt{Pr}(1-\bar{r})+\frac{\pi}{4}\right)\right]; \qquad (5)$$

$$\tilde{\rho}=\cos\omega t+(x-1)\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\exp(-H\sqrt{Pr}(1-\bar{r}))\cos(\omega t-H\sqrt{Pr}(1-\bar{r}));$$

$$\tilde{T}=\cos\omega t-\bar{r}^{-\frac{1}{2}}\exp(-H\sqrt{Pr}(1-\bar{r}))\cos(\omega t-H\sqrt{Pr}(1-\bar{r})).$$

В ядре течения колебания давления, температуры и плотности синфазны, колебания осевой скорости отстают на $0{,}5\pi$, а колебания радиальной скорости опережают на $0{,}25\pi$ колебания давления. В области пограничного слоя колебания термодинамических величин могут быть записаны в виде

$$\tilde{p}=\cos\omega t;\quad \tilde{U}\sim\cos(\omega t+\varphi_u);\ \tilde{v}\sim\cos(\omega t+\varphi_v);\ \tilde{\rho}\sim\cos(\omega t+\varphi_\rho);\ \tilde{T}\sim\cos(\omega t+\varphi_T),$$

где

$$\varphi_u=\mathrm{arctg}\left(\frac{e^{-\eta}\sin\eta}{1-e^{-\eta}\cos\eta}\right)-\frac{\pi}{2};$$

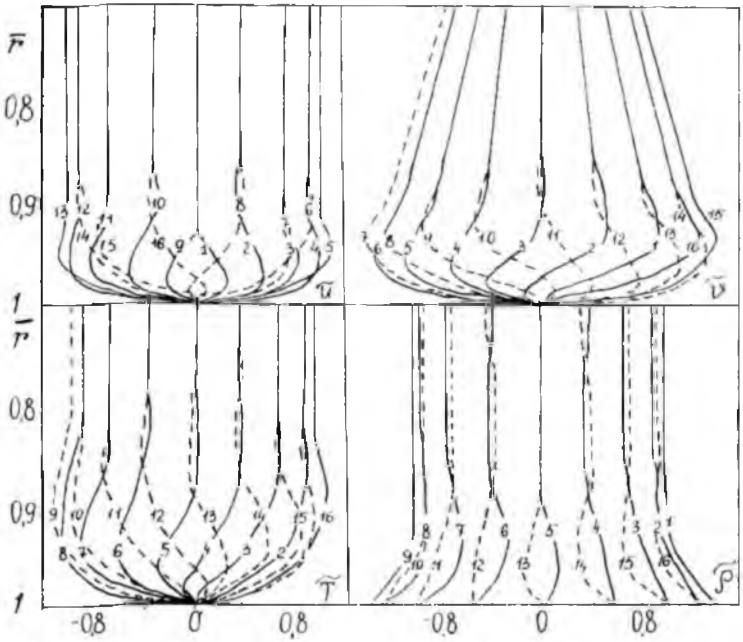
$$\varphi_v=-\mathrm{arctg}\left(\frac{\left(\frac{x-1}{\sqrt{Pr}}+1\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\bar{r}^{2}\right)-\frac{x-1}{\sqrt{Pr}}e^{-\eta^*}\cos\eta^*-e^{-\eta^*}\cos\eta^*}{\frac{x-1}{\sqrt{Pr}}e^{-\eta^*}\sin\eta^*+e^{-\eta^*}\sin\eta^*}\right)-\frac{\pi}{4};$$

$$\varphi_\rho=\mathrm{arctg}\left(\frac{1+(x-1)e^{-\eta^*}\cos\eta^*}{(x-1)e^{-\eta^*}\sin\eta^*}\right)-\frac{\pi}{2}; \qquad (6)$$

$$\varphi_T=-\mathrm{arctg}\left(\frac{1-e^{-\eta^*}\cos\eta^*}{e^{-\eta^*}\sin\eta^*}\right)-\frac{\pi}{2};$$

нижний индекс указывает величину, для которой находится разность фаз $\eta=H(1-\bar{r})$; $\eta^*=\sqrt{Pr}\,\eta$.

Профили колебаний осевой и радиальной компонент скорости, температуры и плотности показаны на рис. I. Как видно, характеры изменения профилей термодинамических величин вблизи стенки аналогичны для $\tilde{U}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{T}$, что обусловлено одинаковыми однородными граничными условиями на стенке и подобием структуры акустического и нестационарного температурного пограничного слоев. Иная форма изменения профиля $\tilde{\rho}$ в течение периода объясняется тем, что согласно уравнению состояния при постоянном по сечению давлении уменьшение ампли-



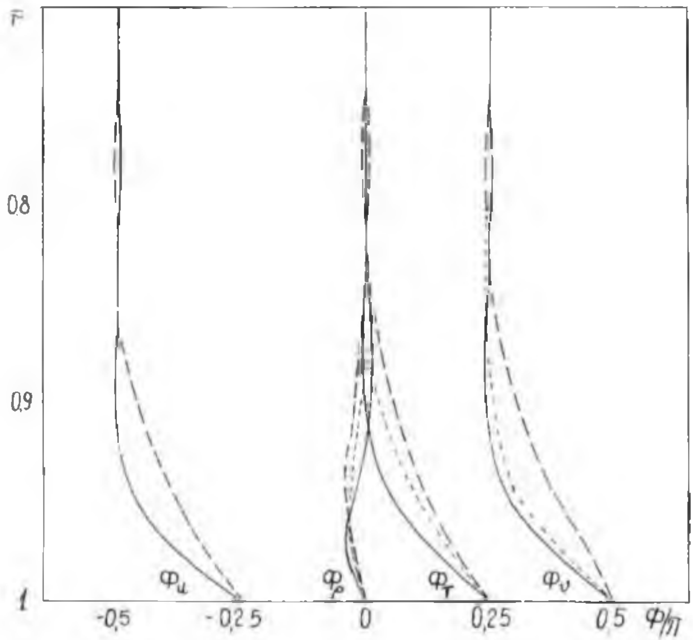
Р и с. I. Профили колебаний термодинамических величин: $H = 40$; $Pr = 0{,}72$; I – $\omega t = 0$; 2 – $0{,}125\pi$; 3 – $0{,}25\pi$; ...; I6 – $\omega t = 2\pi$

туды колебаний температуры при $r \to R$ приводит к росту амплитуды колебаний плотности.

На рис. 2 показано изменение вблизи стенки фазовых соотношений между колебаниями давления и колебаниями осевой и радиальной компонент скорости, колебаниями плотности и температуры вблизи стенки.

Разность фаз между осевой скоростью и давлением вблизи стенки уменьшается до $0{,}25\pi$ вследствие того, что силы вязкости частично компенсируют влияние инерции. Возникает разность фаз между колебаниями температуры и колебаниями давления, возрастающая с приближением к стенке до $0{,}25\pi$ и обусловленная теплообменом газа со стенкой. Увеличивается до $0{,}5\pi$ разность фаз между колебаниями радиальной скорости и давления.

Рассмотрим уравнение энергии второго порядка



Р и с. 2. Изменение разности фаз Φ между колебаниями давления и соответствующими индексам величинами: ——— 1 – H = 40; Pr = 0,72; — — 2 – H = 20, Pr = 0,72; - - - - 3 – H = 40, Pr = 0,33

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) = -\rho_0 c_p\left(u_1\frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) -$$
$$-\rho_1 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 + u_1\frac{\partial p_1}{\partial x}. \qquad (7)$$

Осреднив (7) по времени, имеем

$$F(x,r) = -\rho_0 c_p\left(\left\langle u_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\right\rangle + \left\langle v_1\frac{\partial T_1}{\partial r}\right\rangle\right) - c_p\left\langle \rho_1\frac{\partial T_1}{\partial t}\right\rangle + \mu\left\langle\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2\right\rangle + \left\langle u_1\frac{\partial p_1}{\partial x}\right\rangle, \qquad (8)$$

где $F(x,r) = -\left\langle\left(\frac{\lambda}{r}\right)\partial/\partial r\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)\right\rangle$ – мощность объемного тепловыделения.

Подставив выражения (4) в (8), отбрасывая члены порядка H^{-1} и выше, получим

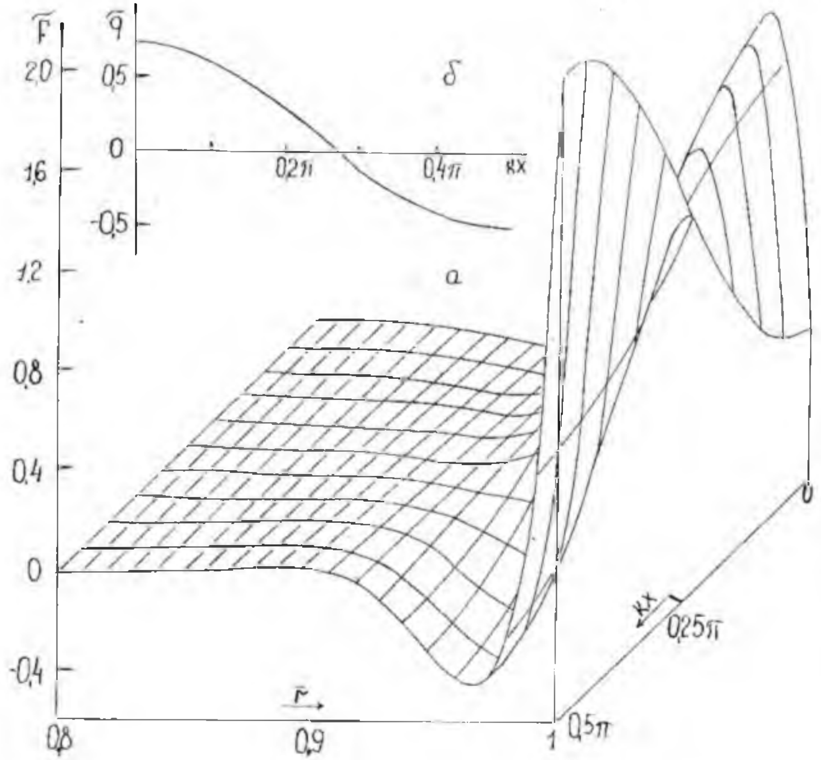
$$F(x,r) = \frac{1}{4}\rho_0 c_0^2 \frac{M}{a}\omega \bar{r}^{-1}\left[\bar{r}^{\frac{1}{2}}(\varkappa-1)e^{-\eta^*}\sin\eta^* - (\varkappa-1)e^{-2\eta^*} + e^{-2\eta^*} - e^{-(1+\sqrt{Pr})\eta}\right.,$$

$$\times\left[\sin(1-\sqrt{Pr})\eta+\sqrt{Pr}\cos(1-\sqrt{Pr})\eta\right]+\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\bar{r}^{2}\right)(x-1)\sqrt{Pr}\,\times$$

$$\times\bar{r}^{-\frac{1}{2}}e^{-\eta^*}\cos\eta^*+\cos 2kx\left[\bar{r}^{-\frac{1}{2}}(x+1)e^{-\eta^*}\sin\eta^*-(x-1)e^{-2\eta^*}-e^{-2\eta^*}+e^{-(1+\sqrt{Pr})\eta}\times\right. \quad (9)$$

$$\left.\times\left[\sin(1-\sqrt{Pr})\eta-\sqrt{Pr}\cos(1-\sqrt{Pr})\eta+\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\bar{r}^{2}\right)(x-1+\sqrt{Pr})\bar{r}^{-\frac{1}{2}}e^{-\eta^*}\cos\eta^*\right]\right\}.$$

Назовем величину $\tilde{F}=rF(x,r)/(\frac{1}{4})\rho_0 c_0^2 m\omega\frac{R}{H}$ приведенной мощностью объемного тепловыделения. На рис. 3 величина $\tilde{F}$ построена в за-



Р и с. 3. Распределение мощности объемного тепловыделения (а) и локального теплового потока к стенкам (б): $H = 40$, $Pr = 0{,}72$

висимости от безразмерных координат $\bar{r}$ и kx. Она показывает распределение внутри канала источников и стоков тепла, генерируемых резонансными колебаниями газа.

Если проинтегрировать $F(x,r)$ по радиальной координате, получим локальный тепловой поток к стенке трубы $q(x)$. С учетом конечности параметра H имеем

$$q(x)=\frac{1}{8}\rho_o c_o^2\frac{M}{a}\,\frac{\omega R}{H}(A\cos 2kx+B), \qquad (10)$$

где $A=\left[3(1-Pr^{\frac{3}{2}})+Pr(x-1)+Pr^{\frac{1}{2}}+x\right]/16(1+Pr)Pr^{\frac{1}{2}}$; $B=\left[(x-1)/Pr^{\frac{1}{2}}+1\right]/16$.

Распределение приведенного значения локального теплового потока $\bar{q}=q(x)/(\frac{1}{8})\rho_o c_o^2 M\frac{\omega R}{aH}$ по длине канала дано на рис. 3,б. Как видно, в канале образуются зоны с положительными и отрицательными стационар-ными тепловымип потоками, т.е. помимо известных стационарных вихре-вых течений (вихри Рэлея и Шлихтинга) резонансные колебания реализу-ют в канале теплоперенос.

Полученные результаты могут быть использованы в инженерных рас-четах систем управления энергетических установок, а также при разра-ботке принципиально новых агрегатов волновой техники.

Библиографический список

1. Галиуллин Р.Г., Ревва И.П., Халимов Г.Г. Теория термических автоколебаний. – Казань: КГУ, 1982. – 156 с.

2. Галиуллин Р.Г., Ревва И.П. Истечение пульсирующей струи из цилиндрического канала при колебаниях большой амплитуды //Изв.вузов. Энергетика, – 1987. – № 3. – С. 61-64.

3. Галиуллин Р.Г., Ревва И.П., Пермяков Е.И. Колебания газа большой амплитуды в трубе с открытым концом //Акуст.журн. – 1982. – Т. 28. – № 5. – С. 617-621.

4. Галиуллин Р.Г., Ревва И.П., Халимов Г.Г. Термоакустический эффект в резонансной полуоткрытой трубе //Инж.-физ. журнал. – 1982.– Т. 43. – № 4. – С. 615-623.