УДК 62-501

Н.П.Шумский

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ГТД

Рассмотрена задача об абсолютной устойчивости нелинейных систем до пятого порядка включительно на плоскости двух обобщенных параметров. Разработан простой метод выделения класса нелинейных систем в широком смысле, подобных устойчивым линейным системам. Исследование проведено на базе критериев и диаграмм устойчивости, разработанных автором.

Реальные системы управления и автоматического регулирования ГТД по существу нелинейны. Эти нелинейности, обусловленные физическими и гидравлическими особенностями работы их звеньев, дестабилизируют систему, ухудшают переходный процесс и существенно усложняют исследование и проектирование системы в целом.

Однако некоторые нелинейности вводятся специально в систему для повышения устойчивости. Во всех этих случаях исследование и проектирование таких систем усложняется и представляет большие трудности как в теоретическом (ввиду отсутствия универсальных методов решения нелинейных систем дифференциальных уравнений), так и в практическом отношениях на этапе проектирования и доводки регуляторов.

С проблемой устойчивости нелинейных систем тесно связана задача о выделении систем, для которых нелинейная система абсолютно устойчива, если устойчива соответствующая линейная модель. Для таких систем абсолютная устойчивость обеспечивается просто выполнением критерия Гурвица для линеаризованной системы.

В последнее время эта задача вышла за пределы только задачи устойчивости, поскольку критерии абсолютной устойчивости обеспечивают ряд важных особенностей протекания процессов регулирования и одновременно решают проблему выделения нелинейных систем, в широком смысле подобных линейным устойчивым системам: их решения стремятся к положению равновесия после любых начальных отклоне-

Динамические процессы в установках ЛА. Куйбышев, 1990.

ной. Из критерия В.М.Попова [I] следует, что этим замечательным свойством заведомо обладают системы, у которых видоизмененная частотная характеристика линейной части системы вся лежит справа от касательной, проведенной к ней в крайней левой точке, где она пересекает действительную ось [I, 2, 3].

Примером того, что не всякая устойчивая линейная модель в гурвицевом углу абсолютно устойчива, является система третьего порядка с нелинейным демпфированием.

Эта проблема, поставленная М.А.Айзерманом, решена в общем виде частотным методом В.М.Поповым. Однако задача выделения класса таких нелинейных систем, подобных устойчивым линейным, еще до сих пор не получила полного теоретического и практического решения, хотя и имеет актуальное значение при проектировании современных систем управления и создания САПР. В такой постановке задача решена лишь для одноконтурных систем до пятого порядка [7], содержащих только одноемкостные звенья. Остается открытым вопрос, верно ли такое же утверждение для произвольной одноконтурной системы. Это направление исследований является не только интересным в теоретическом отношении, но и актуальным в практическом смысле, поскольку полученные результаты позволяют использовать обычные линейные методы для оценки устойчивости и оптимизации часто встречающихся сложных нелинейных структур управления ГТД.

При более тщательном рассмотрении этого вопроса выявлены случаи, когда условия критерия В.М.Попова не выполняются, тем не менее система абсолютно устойчива во всей области существования решений или в ограниченной области изменения ее параметров. Это обстоятельство является весьма существенным при проектировании сложных многомерных систем управления и определении главных элементов настройки и их оптимальных параметров.

С другой стороны, поскольку эта проблема недостаточно полно изложена в литературе, проблема разработки инженерных методов исследования и расчета нелинейных систем и выявление условий их абсолютной устойчивости занимает особое место и время в процессе разработки конкретных систем управления и регулирования ГТД.

Предметом исследования являются нелинейные системы автоматического регулирования (САР) силовых установок ГТД и летательных аппаратов, описываемые дифференциальными уравнениями до 5-го порядка включительно. Исследование проводится на базе критериев устойчивости [4] и математической модели [5]

$$Q(p)x + R(p)\mathcal{F}(x) = 0. \tag{I}$$

Здесь $\mathcal{F}(x)$ – нелинейная функция; $W(p) = \dfrac{R(p)}{Q(p)}$ – передаточная функция приведенной линейной части,

$$W(p) = \frac{\tau_4' p^4 + \tau_3' p^3 + \tau_2' p^2 + \tau_1' p + \tau_0'}{\tau_5 p^5 + \tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + \tau_0}. \tag{2}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при старших степенях " p ", получим соответственно системы третьего и четвертого порядков:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \tau_5 = \tau_4 = 0, \quad \tau_4' = \tau_3' = 0, \\ &\text{б) } \tau_5 = 0, \quad \tau_4' = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

К этой модели (I–3) приводятся большинство конкретных систем управления ЛА, включая и многомерные системы ГТД.

После гармонической линеаризации нелинейной функции устойчивость нелинейных САР 3, 4, 5-го порядков соответственно определяется следующими критериальными соотношениями:

$$y_1 = \frac{1}{x_1}; \quad y_1 = \frac{1}{x_1} + x_1; \quad y_1 = \sqrt{B_1}\left[\frac{1}{x_1} + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right)x_1\right];$$

$$x_1 = x_1(\tau_i, \tau_i', q); \quad y_1 = y_1(\tau_i, \tau_i', q); \quad \beta_1 = \beta_1(\tau_i, \tau_i', q),$$

где q – гармонический коэффициент усиления нелинейного элемента.

Однако для сравнения линейной и нелинейной модели выделим в параметрах устойчивости $x_1, y_1; \beta_1$ линейные $x, y; \beta_0$ и нелинейные γ_i их части. Например, для САР 3-го и 4-го порядков после линеаризации нелинейности и приведения уравнения к нормированному виду

$$(p^3 + A_2' p^2 + A_1' p + 1)x = 0; \quad (p^4 + A_3' p^3 + A_2' p^2 + A_1' p + 1)x = 0$$

получим

$$A_2' = A_2\gamma_2, \; A_1' = A_1\gamma_1; \quad A_3' = A_3\gamma_3, \; A_2' = A_2\gamma_2, \; A_1' = A_1\gamma_1,$$

где параметры A_i характеризуют линейную часть системы, а γ_i учитывает влияние нелинейности. Их выражения для САР 3-го порядка равны

$$A_1=\frac{\tau_1+\tau_1'}{\sqrt[3]{\tau_3(\tau_0+\tau_0')^2}},\quad A_2=\frac{\tau_2+\tau_2'}{\sqrt[3]{\tau_3^2(\tau_0+\tau_0')}},$$

$$\gamma_1=\frac{\tau_1+q\tau_1'}{\tau_1+\tau_1'}\sqrt[3]{\left(\frac{\tau_0+\tau_0'}{\tau_0+q\tau_0'}\right)^2},\quad \gamma_2=\frac{\tau_2+q\tau_2'}{\tau_2+\tau_2'}\sqrt[3]{\frac{\tau_0+\tau_0'}{\tau_0+q\tau_0'}}.$$

Тогда уравнение устойчивости нелинейных систем 3-го порядка можно представить в виде

$$y=\frac{B}{x}. \tag{4}$$

Здесь

$$B=\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}=\frac{\tau_0+q\tau_0'}{\tau_0+\tau_0'}\,\frac{\tau_1+\tau_1'}{\tau_1+q\tau_1'}\,\frac{\tau_2+\tau_2'}{\tau_2+q\tau_2'}. \tag{5}$$

Произведя аналогичные преобразования, получим критериальные соотношения для САР 4-го и 5-го порядков

$$y=\frac{B}{x}+Ax,$$

$$y=\sqrt{\beta_0}\left[\frac{B}{x}+\left(1+\frac{1}{\beta_0}\right)Ax\right],$$

где для САР 4-го порядка

$$A=\frac{\gamma_1}{\gamma_2\gamma_3}=\frac{\tau_1+q\tau_1'}{\tau_1+\tau_1'}\,\frac{\tau_2+\tau_2'}{\tau_2+q\tau_2'}\,\frac{\tau_3+\tau_3'}{\tau_3+q\tau_3'},$$

$$B=\frac{\gamma_3}{\gamma_1\gamma_2}=\frac{\tau_1+\tau_1'}{\tau_1+q\tau_1'}\,\frac{\tau_2+\tau_2'}{\tau_2+q\tau_2'}\,\frac{\tau_3+q\tau_3'}{\tau_3+\tau_3'}\,\frac{K_0+q}{K_0+1},\quad K_0=\frac{\tau_0}{\tau_0'},$$

$$\gamma_1=\frac{\tau_1+q\tau_1'}{\tau_1+\tau_1'}\sqrt[4]{\left(\frac{\tau_0+\tau_0'}{\tau_0+q\tau_0'}\right)^3},\quad \gamma_2=\frac{\tau_2+q\tau_2'}{\tau_2+\tau_2'}\sqrt{\frac{\tau_0+\tau_0'}{\tau_0+q\tau_0'}},$$

$$\gamma_3=\frac{\tau_3+q\tau_3'}{\tau_3+\tau_3'}\sqrt[4]{\frac{\tau_0+\tau_0'}{\tau_0+q\tau_0'}};$$

$$x=\frac{A_1}{A_3}=\frac{\tau_1+\tau_1'}{\tau_3+\tau_3'}\sqrt{\frac{\tau_4}{\tau_0+\tau_0'}},\quad y=\frac{\tau_2+\tau_2'}{\sqrt{\tau_4(\tau_0+\tau_0')}}=A_2.$$

Эти соотношения верны, если система астатическая $\tau_0 = 0$, с форсирующей связью ($\tau_0' = 0$), для линейной модели при $\gamma_i = 1$ задана в форме передаточной функции разомкнутой системы или в форме характеристического уравнения $\tau_4 p^4 + \tau_3 p^3 + \tau_2 p^2 + \tau_1 p + \tau_0 = 0$.

Заметим, что нелинейные параметры $A = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 \gamma_3}$, $B = \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2}$ инвариантны к взаимно симметричным преобразованиям $x_1 = A_1/A_3$; $x_2 = A_3/A_2$

$$y = \frac{\gamma_1}{\gamma_3 \gamma_2} x + \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{1}{x} \Big|_{x = A_1/A_3} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 \gamma_3} \frac{1}{x} + \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2} x \Big|_{x = A_3/A_1}$$

и не зависят от того, как обозначена переменная величина: $x = \frac{A_1}{A_3}$ или $x = \frac{A_3}{A_1}$. В этом смысле можно сказать, что нелинейные параметры "A" и "B" характеризуют "внутренние" свойства нелинейной системы, аналогично тому, как кривизна и элемент дуги кривой характеризуют ее натуральные свойства. Точно так же и сама кривая $y = \frac{1}{x} + x$, отражающая критерий устойчивости линейной модели при $\gamma_i = 1$, инвариантна к этим преобразованиям. Эти свойства дают возможность семейство кривых, зависящих от нелинейных характеристик, плотно приближенных к левой ветви кривой линейной устойчивости при $x < 1$, отобразить на область $x > 1$ (например в [4] на рис. 3 и в таблице принято $x = \frac{A_3}{A_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1}\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_4}}$).

Для САР 5-го порядка

$$A = \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_2} \sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_3} \frac{c_x}{c_0}}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{\gamma_2 \gamma_3} \frac{c_0}{c_x}},$$

$$x = \sqrt{\frac{\tau_1 + \tau_1'}{\tau_3 + \tau_3'} \frac{\tau_2 + \tau_2'}{\tau_0 + \tau_0'} - 1}, \quad y = \sqrt{\frac{(\tau_2 + \tau_2')(\tau_3 + \tau_3')}{\tau_5 (\tau_0 + \tau_0')}},$$

$$\beta_0 = \frac{\tau_3 + \tau_3'}{\tau_2 + \tau_2'} \frac{\tau_4 + \tau_4'}{\tau_5} - 1, \quad \frac{A_3 A_4}{A_2} = \frac{(\tau_3 + \tau_3')(\tau_4 + \tau_4')}{(\tau_2 + \tau_2')\tau_5},$$

$$\frac{A_1 A_2}{A_3} = \frac{\tau_1 + \tau_1'}{\tau_0 + \tau_0'} \frac{\tau_2 + \tau_2'}{\tau_3 + \tau_3'}, \quad \frac{c_0}{c_x} = \frac{\left(\frac{A_3 A_4}{A_2} \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_2} - 1\right)\left(\frac{A_1 A_2}{A_3} - 1\right)}{\left(\frac{A_3 A_4}{A_2} - 1\right)\left(\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} - 1\right)},$$

$$\frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_2} = \frac{\tau_3 + \tau_3' q}{\tau_3 + \tau_3'} \frac{\tau_4 + q\tau_4'}{\tau_4 + \tau_4'} \frac{\tau_2 + \tau_2'}{\tau_2 + q\tau_2'}, \quad \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} =$$

$$= \frac{\tau_1 + q\tau_1'}{\tau_1 + \tau_1'} \frac{\tau_2 + \tau_2' q}{\tau_2 + \tau_2'} \frac{\tau_3 + \tau_3'}{\tau_3 + q\tau_3'} \frac{\tau_0 + \tau_0'}{\tau_0 + q\tau_0'},$$

$$\gamma_2\gamma_3 = \frac{\tau_0 + \tau_0'}{\tau_0 + q\tau_0'} \, \frac{\tau_2 + q\tau_2'}{\tau_2 + \tau_2'} \, \frac{\tau_3 + q\tau_3'}{\tau_3 + \tau_3'} ,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1 + q\tau_1'}{\tau_1 + \tau_1'} \sqrt[5]{\left(\frac{\tau_0 + \tau_0'}{\tau_0 + q\tau_0'}\right)^4}, \quad \gamma_2 = \frac{\tau_2 + q\tau_2'}{\tau_2 + \tau_2'} \sqrt[5]{\left(\frac{\tau_0 + \tau_0'}{\tau_0 + q\tau_0'}\right)^3},$$

$$\gamma_3 = \frac{\tau_3 + \tau_3' q}{\tau_3 + \tau_3'} \sqrt[5]{\left(\frac{\tau_0 + \tau_0'}{\tau_0 + q\tau_0'}\right)^2}, \quad \gamma_4 = \frac{\tau_4 + q\tau_4}{\tau_4 + \tau_4'} \sqrt[5]{\frac{\tau_0 + \tau_0'}{\tau_0 + q\tau_0'}} .$$

Если в передаточной функции в числителе стоит лишь постоянное число (τ_0'), то эти формулы упрощаются, поскольку $\tau_i' = 0,\ i = 1,2,3,4,$ в этом случае

$$x = \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_3(\tau_0 + \tau_0')} - 1} , \quad y = \sqrt{\frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_0 \tau_5}} , \quad \beta_0 + 1 = \frac{\tau_3 \tau_4}{\tau_2 \tau_5} .$$

Полученные соотношения позволяют определить области устойчивости нелинейных систем на плоскости обобщенных параметров при различных значениях параметров А, В, отражающих влияние нелинейности на динамику системы управления, и показать различные реализации проблемы Айзермана.

Особенность полученных критериальных соотношений состоит в следующем:

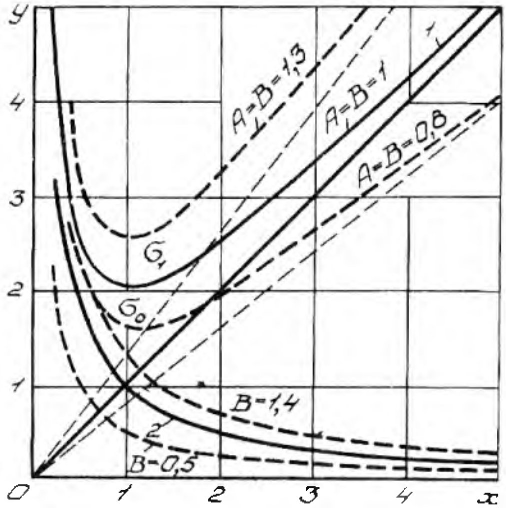
при $A = 1$, $B = 1$ они отражают критерий устойчивости линейных систем;

при $A < 1$, $B < 1$; $A < 1, B = 1$; $A = 1, B < 1$ имеет место расширение области устойчивости линейной модели на величину σ_0 (рис. I).

Из этих неравенств и рис. I следует, что из устойчивости линейной модели следует абсолютная устойчивость нелинейной системы;

при $A > 1, B > 1$; $A > 1, B = 1$; $A = 1, B > 1$ область устойчивости уменьшается на величину σ_1 (рис. 2,а,б), в которой нелинейная система неустойчива. В этом случае устойчивость линейной модели в области σ_2 определяет абсолютную устойчивость нелинейной системы.

Таким образом, в нелинейных системах могут быть различные ситуации, содержание которых выявляется с помощью сравнительного анализа с линейной моделью, когда условия критерия В.М.Попова могут не выполняться, тем не менее система может быть абсолютно



Р и с. I. Устойчивость нелинейных систем 4-го (I) и 3-го (2) порядков: σ_0, σ_1 – расширение и сужение области устойчивости линейной модели

устойчива для всей области существования решений или в ограниченной области изменения параметров. Для САР 3-го порядка это показано другим путем в [9].

В частности, при а) $A>1,\ B<1$, б) $A<1,\ B>1$ эта область ограничена неравенствами

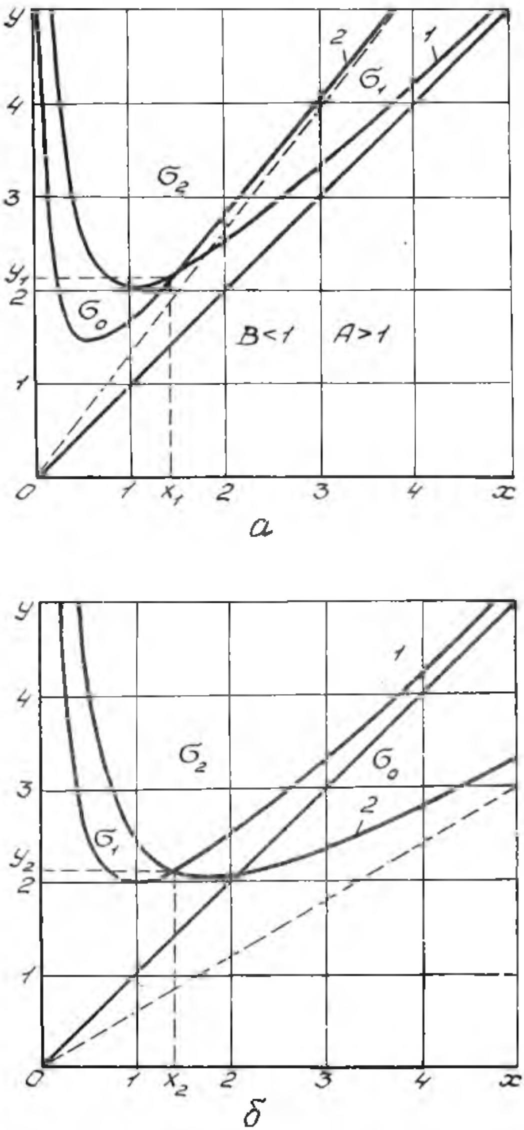
$$x < x_1 = \sqrt{\frac{1-B}{A-1}}\ ,\quad y = \frac{A-B}{\sqrt{1-B}}\ ;$$

$$x > x_2 = \sqrt{\frac{B-1}{1-A}}\ ,\quad y = \frac{B-A}{\sqrt{(B-1)(1-A)}}\ .$$

Она абсолютно устойчива и в области σ_2 (рис. 2,а,б).

Данный анализ соответствует в теории регулирования методу мажорирующих функций, когда из устойчивости мажорирующей матрицы следует устойчивость исходной матрицы состояния [6].

Из этого анализа следует, что нелинейность может не только уменьшить область устойчивости и вызвать колебательные процессы системы, но и в некоторых случаях расширить область устойчивости линейной модели и увеличить запасы устойчивости. Это обстоятельство и используется на практике для стабилизации систем путем



Р и с. 2. Устойчивость нелинейных систем 4-го порядка: а) $y=(1/x)+x$ (1), $y=(0,4/x)+1,3x$ (2); б) $y=(1/x)+x$ (1), $y=(1,8/x)+0,6x$ (2); σ_1, σ_2 – расширение и сужение области устойчивости линейной модели введения в них специальных нелинейностей. Например, турбулентное истечение в дросселе исполнительного механизма плюс зона нечувствительности увеличивают область устойчивости. На практике это осуществляется введением сухого трения в сервопоршень исполнительного механизма или путем конструктивного обеспечения допустимой, с точки зрения точности регулирования, зоны перекрытия отверстий во втулке золотника управляющего устройства систем регулирования ГТД.

Рассмотрим несколько конкретных систем.

САР 3-го порядка. Из структуры нелинейного параметра B (5) следует, что нелинейная астатическая система 3-го порядка $(\tau_0 = 0)$ абсолютно устойчива, если параметры системы удовлетворяют условию $B < 1$, что приводит к квадратичному неравенству

$$z^2 - (1+\lambda)z + \lambda > 0, \qquad (6)$$

из которого следует, что $z_1 > 1$, $z_2 > \lambda$, $z = \frac{1}{q}$, $\lambda = \alpha_1 \alpha_2$; $\alpha_i = \frac{\tau_i'}{\tau_i}$, $i = 1,2,3$, откуда условие (6) выполняется, если

$$q < 1 < \lambda. \qquad (7)$$

Таким образом, нелинейные астатические системы третьего порядка в самом общем случае при условии (6) и ограничении (7) принадлежат к классу абсолютно устойчивых систем, т.е. эти системы абсолютно устойчивы, если в числителе передаточной функции приведенной линейной части системы стоит оператор (многочлен) первой или второй степени относительно „p" или постоянное число, в том числе и когда САР 3-го порядка не охватывается теоремой В.М.Попова, что согласуется с выводами в [9].

САР 4-го порядка. Построение параметров A и B и зависимость их от характеристик системы показывают, что при $\alpha_3 = 0$ условия $B < 1$, $A < 1$ реализуются в первом случае $(B < 1)$ при $\alpha_1 > \alpha_2$, $q < 1$, а во втором $(A < 1)$ – при выполнении критериального соотношения (6) и ограничений (7), которые имеют место и для САР 4-го порядка.

Таким образом, нелинейные астатические системы 4-го порядка при $\alpha_3 = 0$ относятся к классу абсолютно устойчивых систем, а при $\alpha_3 \neq 0$, т.е. в самом общем случае, абсолютно устойчивы в ограниченной области $X > X_2$ изменения параметров системы и в области G_2' .

Аналогично можно провести анализ и для САР 5-го порядка.

Что касается любой структуры устойчивой одноконтурной цепи при $n \leq 5$ без воздействия по производной (состоящей из одноемкостных звеньев), являющейся частным случаем рассмотренной здесь модели, абсолютная устойчивость доказана другим путем в [7, 8, 11].

Полученные результаты имеют важное значение в практическом и теоретическом отношениях и отражают тот факт, что критерий Попова является лишь достаточным критерием. Поэтому, естественно, что до сих пор он не доказан как необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости нелинейных систем [7, 8, 11]. С другой стороны, он позволяет выделить класс нелинейных систем, подобных линейным устойчивым системам. Эти результаты ценны и для выявления существенных свойств и особенностей динамических свойств системы и определения комплекса настроечных параметров сложных многомерных систем, которые в существенных чертах могут быть представлены моделями до пятого порядка.

С этой точки зрения представляет практический и теоретический интерес выделение области достаточных условий сходимости процесса регулирования.

Этими условиями являются неравенства Н.И.Соколова [10]

$$\frac{\tau_i \tau_{i+1}}{\tau_{i-1} \tau_{i+2}} > 2,15, \quad i = 1,2,3\ldots(n-2),$$

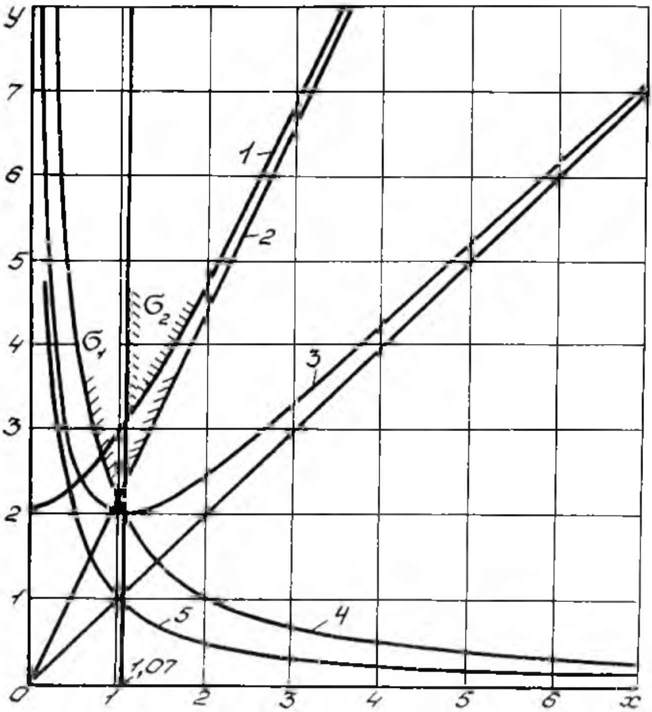
на основе которых области достаточных условий устойчивости для САР 4-го и 5-го порядков по [4] определяются соответственно следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 \geq \frac{2,15}{x} \\ & y_2 \geq 2,15x \end{aligned}\right\} (\sigma_1^*) \qquad \left.\begin{aligned} & y_3 \geq 2,15\sqrt{1+x^2} \\ & x \geq 1,07 \end{aligned}\right\} (\sigma_2^*).$$

Для САР 3-го порядка достаточными условиями устойчивости является неравенство

$$y \geq \frac{2,15}{x}.$$

Из соотношений (10) и рис. 3 следует, что область достаточных условий устойчивости существенно ограничивает изменение па-



Р и с. 3. Области достаточных условий устойчивости систем четвертого и пятого порядков, соответственно σ_1 и σ_2, ограниченные кривыми $y_1 \geq 2{,}15/x$ (4), $y_2 \geq 2{,}15x$ (2), $y_3 > 2{,}15\sqrt{1+x^2}$ (I), $x > 1{,}07$; $y = 1/x + x$ (3) – диаграмма устойчивости системы 4-го порядка, $y = 1/x$ (5) – диаграмма устойчивости системы третьего порядка

раметров, гарантирующих устойчивость системы в целом. Поэтому невыполнение достаточных условий не означает, что система неустойчива вообще, в том числе и абсолютно.

Аналогичный анализ легко провести по установленным формулам и для САР 5-го порядка.

Учет влияния неоднозначных нелинейностей на динамику систем управления проводится по тем же соотношениям, в которых нелинейные параметры A и B зависят уже не только от гармонического коэффициента усиления q, но и от коэффициента сдвига фаз q' нелинейного элемента системы.

Библиографический список

1. Попов В.М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования //Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 26. № 8. С. 961–979.
2. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 119–120.
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического регулирования //Специальные линейные и нелинейные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1966. Ч. 2. С. 181–195.
4. Шумский Н.П. Уравнения и диаграммы устойчивости автоматических систем 4-го и 5-го порядков в обобщенных координатах. Динамические процессы в силовых энергетических установках летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Куйбышев, 1985. С.56–66.
5. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1979. С. 76–82, 137–142.
6. Розенвассер Е.Н. Критерий устойчивости нелинейных дискретных систем //Автоматика и телемеханика. 1966. № 12. С. 58–66.
7. Трухман Н.М. Об одноконтурных системах абсолютно устойчивых в гурвицевом углу //Автоматика и телемеханика. 1966. № 11. С. 5–8.
8. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования //Автоматика и телемеханика. 1968. № 6. С. 5–31.
9. Майгарин Б.Ж. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования 3-го порядка //Автоматика и телемеханика. 1963. № 6. Т. XXIУ.
10. Соколов Н.И., Липатов А.В. О применении "приближенных" критериев устойчивости к синтезу адаптивных систем //Информац. материалы. Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика". 1970. № 7 (44). С. 68–74.
11. Bergen A.R., Williams J.J. Verification of Aizermans conjecture for a Class of Thrd-Order Systems. IRE Trans on Automatic control, V.7, №3, 1962.