[8] V. L. Popov. On infinite dimensional algebraic transformation groups. Transform. Groups **19** (2014), 549–568.
[9] G. Wilson. Collisions of Calogero–Moser particles and an adelic Grassmannian (with an Appendix by I. G. Macdonald). Invent. Math. **133** (1998), 1–41.

p-Подгруппы в трёхмерной группе Кремоны

К.В. Логинов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
loginov@mi-ras.ru

Доклад основан на работе [4]. Будем работать над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ называется группа бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$. При $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Начиная с $n \geqslant 2$, группа Кремоны становится достаточно сложным объектом для изучения. Один из способов понять её структуру состоит в том, чтобы исследовать её конечные подгруппы. При $n = 2$ такие подгруппы были классифицированы И.В. Долгачевым и В.А. Исковских в работе [2]. В размерности 3 ситуация становится более интересной, и полная классификация представляется недоступной. Тем не менее, можно получать классификационные результаты для некоторых классов конечных подгрупп, см. например [5] в случае простых групп. Также имеются различные результаты об ограниченности конечных подгрупп в группе Кремоны (см. [8]), показывающие, что далеко не всякая группа может быть реализована как подгруппа в ней.

Довольно естественно рассмотреть такой класс конечных групп как p-группы. Напомним, что p-группой называется группа порядка p^k, где p – простое число. Определим число $r(G)$, называемое *рангом* p-группы G, как наименьшее число порождающих элементов для G. Рассмотрим следующую задачу (см. [10]): оценить сверху ранг p-групп, вкладывающихся в группу Кремону $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Полное решение этой задачи для $n = 2$ было получено А. Бовилем [1].

В больших размерностях можно рассматривать более общую задачу и вместо группы Кремоны изучать группу бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ рационально связного многообразия X и её p-подгруппы. При $n = 3$ точная оценка на ранг p-подгрупп была получена для $p = 2$ и $p \geqslant 5$, см. теорему 3. Для $n = 3$, $p = 3$ в работе [3] оценка $r(G) \leqslant 4$ было получена по модулю трёх исключительных случаев. В работе [4] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть X — трехмерное рационально связное многообразие, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная 3-группа. Тогда $r(G) \leqslant 4$, и эта оценка точна.*

Следствие 2. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ — конечная 3-группа. Тогда $r(G) \leqslant 4$, и эта оценка точна.*

Как следствие, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3 [6], [7], [9], [3], [11], [4]. *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная p-группа. Тогда она может быть порождена не более, чем r элементами, где*

- $r = 6$ *при* $p = 2$,
- $r = 4$ *при* $p = 3$,
- $r = 3$ *при* $p \geqslant 5$.

Кроме того, эти оценки точны.

Оценка на ранг 3-групп в работе [4] получена без использования классификации трехмерных многообразий Фано, что может быть полезно для дальнейших обобщений.

Список литературы

[1] A. Beauville. p-Elementary subgroups of the Cremona group. J. Algebra **314** (2007), no. 2, 553–564.

[2] I.V. Dolgachev, V.A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I. Progr. Math. **269**, 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[3] A. A. Kuznetsova. Finite 3-Subgroups in the Cremona Group of Rank 3. Math. Notes **108** (2020), no. 5, 697–715.

[4] K. Loginov. A note on 3-subgroups in the space Cremona group 3, arXiv: `math.AG/2102.04522` (2021).

[5] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. J. Algebraic Geom. **21** (2009), 563–600.

[6] Yu. Prokhorov. p-Elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In: Classification of algebraic varieties. EMS Ser. Congr. Rep., 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[7] Yu. Prokhorov. 2-Elementary subgroups of the space Cremona group. In: Automorphisms in birational and affine geometry. Springer Proc. Math. Stat. **79**, 215–229. Springer, Cham, 2014.

[8] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Jordan property for Cremona groups. Amer. J. Math. **138** (2016), no. 2, 403–418.
[9] Yu. Prokhorov, C. Shramov. p-Subgroups in the space Cremona group. Mathematische Nachrichten **291** (2017), no. 8–9, 1374–1389.
[10] J.-P. Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. Moscow Math. J. **9** (2009), no. 1, 193–208.
[11] J. Xu. A remark on the rank of finite p-groups of birational automorphisms. Comptes Rendus Mathématique **358** (2020), no. 7, 827–829.

Зоноиды и зонотопы, связанные с неприводимыми представлениями компактных простых групп Ли

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия
`mesh@ math.mrsu.ru`

В работе Э.Б. Винберга [1] доказано, что все конечномерные нормы в простых компактных алгебрах Ли $\mathfrak{G}$ инвариантные относительно присоединенного представления получаются как продолжения норм на подалгебрах Картана инвариантных относительно действия группы Вейля W. В силу известной теоремы выпуклости Б. Костанта проекции орбит $_\lambda$ присоединенного представления компактных групп Ли на подалгебры Картана суть выпуклые оболочки орбит $W\lambda$ группы Вейля. Целью нашего сообщения является рассмотрение классификации зонотопов среди многогранников $P(\lambda)$ вида $\operatorname{conv} W\lambda$ и выделение в классе орбитопов $\operatorname{conv}{}_\lambda$ выпуклых тел, называемых зоноидами (см. [2]). Эти выпуклые тела характеризуются тем, что их опорные функции являются преобразованиями Фурье положительных борелевских мер.

Теорема 1. *Многогранник $P(\lambda) = \operatorname{conv} W\lambda$ является зонотопом тогда и только тогда, когда числовые метки λ на диаграммах Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{G}$ ранга > 1 имеют следующий вид:*

для A_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n)$, где $\gamma > 0$;

для B_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}) + \alpha\omega_n$, где γ и α — неотрицательные вещественные числа, причём или $\gamma > 0$, или $\alpha > 0$;

для C_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}) + \alpha\omega_n$, где γ и α — неотрицательные числа, причём или $\gamma > 0$, или $\alpha > 0$;

для D_n $\lambda = \gamma(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-2}) + \alpha\omega_{n-1} + \kappa\omega_n$, где γ, α и κ — неотрицательные числа, причём или $\gamma > 0$, или $\alpha > 0$, или $\kappa > 0$;