Подалгебры алгебры Витта конечной коразмерности

А.В. Петухов
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
alex--2@yandex.ru

Общие слова. В моём докладе мне бы хотелось обсудить часть результатов моих совместных работ со Сьюзен Сьерра [1], [2], посвящённых (в качестве центральной темы) описанию примитивных идеалов для алгебр Витта и Вирасоро. Как следствие, мы получаем описание подалгебр Ли в алгебрах Витта и Вирасоро коразмерностей 1 (1 серия), 2 (3 серии), 3 (9 серий) (и, по факту, в докладе я хочу поговорить именно про них). Здесь хочется отметить, что а) наши методы позволяют перечислить подалгебры в алгебре Витта произвольной конечной коразмерности; б) описание подалгебр коразмерности 1 было получено в 2018 году Ондрусом и Виснером [3]. Отправной точкой служат следующие два утверждения: а) любая подалгебра конечной коразмерности в алгебре Вирасоро содержит центр алгебры Вирасоро; б) для всякой подалгебры $\mathfrak{k}$ алгебры Витта конечной коразмерности есть такой конечный набор точек $S \subset \mathbb{C}^\times$ (мы называем его носителем подалгебры) и число n, для которых $\mathfrak{k}$ содержится в алгебре Ли векторных полей с полюсами во всех точках S и содержит алгебру векторных полей, имеющих полюса во всех точках S порядка по крайней мере n.

Алгебра Витта и алгебра Вирасоро. Напомню, что *алгеброй Витта* W называется алгебра Ли алгебраических векторных полей $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\partial_t$ на $\mathbb{C}^\times$; центральное расширение W, задаваемое формулами

$$[f\partial_t, g\partial_t] = (fg' - f'g)\partial_t + \mathrm{Res}_0(f'g'' - g'f'')z \quad (z \text{ централен}),$$

называется алгеброй Вирасоро.

Результаты

Подалгебры в W коразмерности 2			
	$\mathrm{sdeg}(\mathfrak{k})$	$f_{\mathfrak{k}}$	Дополнительные образующие
$W((t-x)(t-y))$	—	$(t-x)(t-y)$	—
$W^{2;1}_{x;\alpha}$	1	$(t-x)^3$	$(t-x)\partial + \alpha(t-x)^2\partial$
$W^{2;2}_{x;\alpha}$	2	$(t-x)^4$	$(t-x)\partial + \alpha(t-x)^3\partial$, $(t-x)^2\partial$

Подалгебры в W коразмерности 3			
	$\mathrm{sdeg}(\mathfrak{k})$	$f_{\mathfrak{k}}$	Дополнительные образующие или явное описание
$W(f_{\mathfrak{k}})$	–	$(t-x)(t-y)(t-z)$	–
$W^{3A}_{x,y;\alpha,\beta}$	–	$(t-x)^2(t-y)^2$	$(t-x)(t-y)(\alpha t+\beta)\partial$, $\alpha x+\beta, \alpha y+\beta \neq 0, x \neq y$
$W^{3B1}_{x,y;\alpha}$	–	$(t-x)^3(t-y)$	$W^{2;1}_{x;\alpha} \cap W(t-y)$, $x \neq y$
$W^{3B2}_{x,y;\alpha}$	–	$(t-x)^4(t-y)$	$W^{2;2}_{x;\alpha} \cap W(t-y)$, $x \neq y$
$W^{3C1}_{x;\alpha}$	$0,2$	$(t-x)^4$	$(t-x)^2\partial+\alpha(t-x)^3\partial$
$W^{3C2}_{x;\alpha,\beta}$	$1,2$	$(t-x)^4$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^2\partial+\beta(t-x)^3\partial$
$W^{3C3}_{x;\alpha,\beta}$	$1,3$	$(t-x)^5$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^2\partial+\beta(t-x)^4\partial$, $(t-x)^3\partial-\alpha(t-x)^4\partial$
$W^{3C4}_{x;\alpha,\beta}$	$1,4$	$(t-x)^6$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^2\partial+\beta(t-x)^5\partial$, $(t-x)^3\partial-\alpha^2(t-x)^5\partial$, $(t-x)^4\partial-2\alpha(t-x)^5\partial$
$W^{3C5}_{x;\alpha,\beta}$	$2,3$	$(t-x)^5$	$(t-x)\partial+\alpha(t-x)^3\partial+\beta(t-x)^4\partial$, $(t-x)^2\partial+\frac{\alpha}{2}(t-x)^4\partial$

В таблицах используются следующие обозначения:

• описание $\mathfrak{k}$ дано в последней строчке и приводится или через набор дополнительных образующих, или через пересечение двух других подалгебр.

• α, β — это параметры, принимающие произвольные значения в $\mathbb{C}$ для всех случаев кроме $W^{3A}_{x,y;\alpha,\beta}$ (для этого случая релевантные условия для α, β даны в таблице);

• x, y, z — это параметры, принимающие произвольные значения в $\mathbb{C}^\times$, а ограничения на них (в тех случаях, когда они есть) даны в таблице.

Список литературы

[1] A.V. Petukhov, S.J. Sierra. Ideals in the enveloping algebra of the positive Witt algebra. Algebras and Representation Theory **23** (2020), no. 4, 1569–1599.

[2] A.V. Petukhov, S.J. Sierra. The Poisson spectrum of the symmetric algebra of the Virasoro algebra, arXiv: `math.RA/2106.02565`.

[3] M. Ondrus, E. Wiesner. Modules induced from polynomial subalgebras of the Virasoro algebra. J. Algebra **504** (2018), 54–84.