Обобщённая гибкость аффинных конусов над кубическими поверхностями

А.Ю. Перепечко
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, МФТИ, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
a@perep.ru

Доклад основан на работе автора [7].

Действие группы называется бесконечно транзитивным, если оно транзитивно на m-наборах различных точек для произвольного натурального m. Обобщё нно гибкие аффинные алгебраические многообразия характеризуются следующим свойством: подгруппа автоморфизмов, порождённая унипотентными подгруппами, бесконечно транзитивно действует на открытом подмножестве. Для гибких многообразий это подмножество совпадает с множеством гладких точек. Мы обсудим примеры гибких многообразий, признаки гибкости аффинных конусов и докажем обобщённую гибкость аффинных конусов над кубическими поверхностями относительно произвольной поляризации (по очень обильному дивизору). В частности, мы рассмотрим цилиндрические подмножества кубических поверхностей и подразбиения их конуса эффективных дивизоров.

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Точка $p \in X$ называется *гибкой*, если касательное пространство T_pX порождено касательными векторами к орбитам действий аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$ на X. Все $\mathbb{G}_a$-действия на X порождают *специальную группу автоморфизмов* $\mathrm{SAut}X \subset \mathrm{Aut}X$.

Многообразие X называется *гибким*, если все гладкие точки на X гибкие, и *обобщённо гибким*, если существует открытое подмножество в X, состоящее из гибких точек. Действие группы G на множестве S называется *бесконечно транзитивным*, если порождённое действие на упорядоченных m-наборах попарно различных элементов S транзитивно для любого $m \in \mathbb{N}$.

По знаменитой теореме [1, Theorem 0.1], следующие условия эквивалентны для аффинного многообразия X размерности $\geqslant 2$:

1. многообразие X является гибким;
2. группа $\mathrm{SAut}X$ действует транзитивно на подмножестве гладких точек $X_{\mathrm{reg}} \subset X$;
3. the group $\mathrm{SAut}X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg}.

Аналогичная теорема верна для обобщённой гибкости, если заменить X_{reg} на открытую $\mathrm{SAut}X$-орбиту, см. [1, Theorem 2.2]. Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени $\geqslant 4$ относительно произвольной очень обильной поляризации была подтверждена в [2], [5], [6].

Однако, аффинный конус X над поверхностью дель Пеццо степени 3 относительно (плюри)антиканонической поляризации не обладает $\mathbb{G}_a$-действиями, см. [3, Corollary 1.8], хотя конус относительно любой другой очень обильной поляризации — обладает, см. [4].

Нами был получен следующий результат [7, Theorem 7.1].

Теорема. Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 3, поляризованная относительно очень обильного дивизора, не пропорционального антиканоническому. Тогда аффинный конус над Y является обобщённо гибким.

Мы обсудим примеры гибких многообразий, критерии гибкости аффинных конусов и доказательство этой теоремы. В частности, мы рассмотрим семейства цилиндров на кубических поверхностях и подразбиения конуса эффективных дивизоров, соответствующие инварианту Фуджиты.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), 767–823.

[2] I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Sbornik: Math **203** (2012), no. 7, 923–949.

[3] I. Cheltsov, J. Park, J. Won. Affine cones over smooth cubic surfaces. Journal of the European Mathematical Society **18** (2016), no. 7, 1537–1564.

[4] I. Cheltsov, J. Park, J. Won. Cylinders in del Pezzo surfaces. International Mathematics Research Notices **2017** (2017), no. 4, 1179–1230.

[5] J. Park, J. Won. Flexible affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4. European Journal of Mathematics **2** (2016), no. 1, 304–318.

[6] A.Y. Perepechko. Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5. Functional Analysis and its Applications **47** (2013), no. 4, 284–289.

[7] A. Perepechko. Affine cones over cubic surfaces are flexible in codimension one. Forum Mathematicum **33** (2021), no. 2, 339–348.