# Об $\mathbb{A}^1$-фундаментальной группе групп Шевалле

**С.С. Синчук**
**Санкт-Петербургский государственный университет, Исследовательская лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербург, Россия**
sinchukss@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с А. Лавреновым и Е. Воронецким, готовящейся к публикации. Цель нашей работы состоит в вычислении пучков $\mathbb{A}^1$-фундаментальных групп схем Шевалле–Демазюра $\mathrm{G}_{sc}(\Phi, -)$, где $\Phi$ — неприводимая система корней с простыми связями достаточно большого ранга.

Пусть $A$ — регулярное кольцо конечной размерности Крулля, содержащее произвольное поле $k$. Напомним, что для $A$-схемы $X$ пучок $\mathbb{A}^1$-гомотопических групп $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(X)$ определяется как $R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{A}^1}}(S^n \wedge \mathrm{Spec}(R)_+, X)$, где через $\mathcal{H}_*^{\mathbb{A}^1}$ обозначена пунктированная нестабильная $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория над $A$. Из результатов работы [1] следует что для произвольной изотропной редуктивной групповой схемы $G$, определённой над $A$, пучок $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(G)$ совпадает с пучком -групп Каруби–Вилламайора $R \mapsto \mathrm{KV}_{n+1}(G, R)$. Напомним, что эти группы определяются как гомотопические группы с номером $n$ от симплициальной группы $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(G) = G(R[\Delta^\bullet])$ (иногда также называемой сингулярной резольвентой).

Естественным вопросом представляется нахождение явного описания этих гомотопических групп. Так, в недавней работе [4] А. Ставрова показала, что группа $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(G)(A)$ совпадает с группой $K_1^G(A)$ (т.н. нестабильным $\mathrm{K}_1$-функтором, промоделированным по $G$), при условии, что изотропный ранг группы $G$ по крайней мере 2.

$\mathbb{A}^1$-фундаментальные группы изотропных групп остаются куда менее изученными объектами. Например, в [6] было показано, что группа $\mathrm{KV}_2(G, k)$ совпадает с мультипликатором Шура $\mathrm{H}_2(G(k), \mathbb{Z})$ в случае, когда поле $k$ бесконечно. Данное вычисление опирается на теорему М. Вендта о гомотопической инвариантности кольца гомологий изотропных редуктивных групп, опирающейся, в свою очередь, на глубокий результат Б. Марго о структуре билдингов Брюа–Титса. В свою очередь, нашим основным результатом является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Равенство* $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(G)(A) = \mathrm{K}_2(\Phi, A)$ *выполняется в следующих случаях:*

- $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ *для* $\ell \geqslant 4$;

- $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ *для* $\ell \geqslant 7$ *при дополнительном предположении* $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

Здесь через $\mathrm{K}_2(\Phi, A)$ обозначено ядро естественного гомоморфизма из группы Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A)$ в группу точек односвязной схемы Шевалле–Демазюра $\mathrm{G}_{sc}(\Phi, A)$. Случай $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ теоремы, по существу, является следствием результатов [5], в то время, как случай $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ опирается на недавние результаты авторов, в частности, на основной результат [2].

Ввиду [1], для доказательства Теоремы 1 достаточно доказать $\mathbb{A}^1$-инвариантность функтора $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$, что, в некотором смысле, является аналогом для функтора $\mathrm{K}_2$ известной проблемы Серра об описании проективных модулей над кольцами многочленов. Из факта $\mathbb{A}^1$-инвариантности для $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$ можно получить явные задания для групп Шевалле над кольцами многочленов от многих переменных при помощи образующих и соотношений. Данные задания являются широким обобщением классических результатов о задании групп Шевалле над кольцом многочленов от одной переменной над полем, см., например, [3].

**Список литературы**

[1] A. Asok, M. Hoyois, M. Wendt. Affine representability results in $\mathbb{A}^1$–homotopy theory, II: Principal bundles and homogeneous spaces, Geom. Top. **22** (2018), no. 2, 1181–1225.

[2] A. Lavrenov, S. Sinchuk. A Horrocks-type theorem for even orthogonal $\mathrm{K}_2$. Doc. Math. **25** (2020), 767–810.

[3] U. Rehmann. Präsentationen von Chevalleygruppen über $k[t]$, preprint, 1975.

[4] A. Stavrova. $\mathbb{A}^1$-invariance of non-stable $\mathrm{K}_1$-functors in the equicharacteristic case, arXiv: `math.KT/1912.05424` (2019).

[5] M. Tulenbaev. The Steinberg group of a polynomial ring. Sb. Math. **45** (1983), no. 1, 139–154.

[6] K. Völkel, M. Wendt. On $\mathbb{A}^1$-fundamental groups of isotropic reductive groups, C. R. Math. **354** (2016), no. 5, 453–458.