Носители характеров глубины 2 унитреугольной группы над конечным полем

М.С. Венчаков
Самарский университет, Самара, Россия
mihail.venchakov@gmail.com

Пусть $U = U_n$ — унитреугольная группа, то есть группа верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ с единицами на диагонали над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n$ — её алгебра Ли, состоящая из верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали, а $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}_n^*$ — двойственное к ней пространство (оно естественно отождествляется с помощью формы следа с пространством нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали). Группа U действует на алгебре Ли $\mathfrak{u}$ присоединённым образом; двойственное действие в пространстве $\mathfrak{u}^*$ называется *коприсоединённым*.

Согласно методу орбит А.А. Кириллова, орбиты коприсоединённого действия находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми комплексными конечномерными представлениями группы U (мы предполагаем, что $p = \operatorname{char}\mathbb{F}_q \geqslant n$). А именно, неприводимый характер $\chi = \chi_\Omega$, соответствующий орбите $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$, вычисляется по формуле

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu \in \Omega} \theta(\mu(\ln(g))),\ g \in U.$$

Здесь $\ln\colon U \to \mathfrak{u}$ — изоморфизм аффинных многообразий, действующий по стандартной формуле для логарифма, а $\theta\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ — произвольный фиксированный нетривиальных гомоморфизм.

Классификация орбит для произвольного n является дикой задачей. С другой стороны, описание орбит максимальной размерности было получено ещё в самой первой работе Кириллова по методу орбит [1]. А именно, каждая такая орбиты является орбитой единственной линейной формы вида $f = \sum_{\alpha \in D_0} \xi(\alpha) e_\alpha$. Здесь $D_0 = \{(n-j+1, j),\ 1 \leqslant j \leqslant n_0 = [n/2]\}$, $\xi\colon D \to \mathbb{F}_q^\times$ — произвольное отображение, а $e_\alpha = e_{i,j}$ для $\alpha = (i,j)$ (в случае чётного n допускается также ситуация $\xi(n_0+1, n_0) = 0$). Явное описание соответствующих характеров (мы будем называть их характеры *глубины* 0) вытекает из результатов работы К. Андре [2]. Более точно, для каждого такого характера χ он описал явными уравнениями его *носитель*

$$\operatorname{Supp}(\chi) = \{g \in U \mid \chi(g) \neq 0\}$$

и вычислил значение характера χ на произвольном классе сопряжённости из носителя.

Орбиты предмаксимальной размерности были описаны в работе М.В. Игнатьева и А.Н. Панова [4]. Соответствующие им характеры были вычислены в работе М.В. Игнатьева [3]. В частности, к ним относятся характеры глубины 1, соответствующие орбитам линейных форм вида $f = \sum_{\alpha \in D_1} \xi(\alpha) e_\alpha$, где $D_1 = D_0 \cup \{(n-1, 1), (n, 2)\} \setminus \{(n, 1), (n-1, 2)\}$. Основной метод, использованный при доказательстве, — метод полупрямого разложения Макки [7] (см. также [6]). Этот метод сводит изучение неприводимых характеров группы вида $A \rtimes B$, где A абелева, к неприводимым характерам группы A и их централизаторов в группе B. Выбирая $A = \{g \in U \mid g_{i,j} = 0 \text{ при } i > j > 1\}$, $B = \{g \in U \mid g_{i,1} = 0 \text{ при } i > 1\} \cong U_{n-1}$, можем свести вычисление соответствующих характеров к характерам глубины 0, описание которых уже известно.

Следующим естественным шагом является рассмотрение характеров глубины 2, соответствующих орбитам линейных форм вида $f = \sum_{\alpha \in D_2} \xi(\alpha) e_\alpha$, где $D_2 = (D_0 \cup \{(n-1, 1), (n-2, 2), (n, 3)\}) \setminus \{(n, 1), (n-1, 2), (n-2, 3)\}$. Метод полупрямого разложения Макки позволяет свести вычисление таких характеров к характерам глубины 1, описание которых уже известно. Основной результат, который я представлю в докладе, заключается в явном описании носителей характеров глубины 2 с помощью уравнений. Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым [5].

Список литературы

[1] А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН **17** (1962), 57–110.

[2] C.A.M. Andrè. Basic characters of the unitriangular group. J. Algebra **175** (1995), 287–319.

[3] M.V. Ignatyev. Subregular characters of the unitriangular group over a finite field J. Math. Sci. **156** (2009), no. 2, 276–291, arXiv: `math.RT`/0801.3079.

[4] M.V. Ignatyev, A.N. Panov. Coadjoint orbits of the group $\mathrm{UT}(7, K)$. J. Math. Sci. **156** (2009), no. 2, 292–312, arXiv: `math.RT`/0603649.

[5] M.V. Ignatev, M.S. Venchakov. The supports for characters of depth 2 of the unitriangular group, preprint.

[6] G.I. Lehrer. Discrete series and the unipotent subgroup. Compositio Math. **28** (1974), fasc. 1, 9–19.

[7] G.W. Mackey. Infinite dimensional group representations. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 628–686.