Максимальные разрешимые алгебры Лейбница, нильрадикалом которых является квази-филиформная алгебра Лейбница

К.К. Абдурасулов, Ж.К. Адашев
Институт математики им. В.И. Романовского при АН РУз, Ташкент, Узбекистан
abdurasulov0505@mail.ru, adashevjq@mail.ru

Напомним, что для конечномерных алгебр Лейбница над полем характеристики нуль существует аналог разложения Леви: любая алгебра Лейбница разлагается в полупрямую сумму полупростой алгебры Ли и ее разрешимого радикала [1]. Поэтому, как и в случае Ли, основная проблема изучения алгебр Лейбница сводится к разрешимым.

Целью данной работы является описание разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикалом которых является естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Лейбница, и с максимальной размерностью дополняющего пространства к нильрадикалу. А именно, естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры Лейбница в любой конечной размерности над $\mathbb{C}$ изучена в работе [2]. Отметим, что с точностью до изоморфизма существует пять таких алгебр первого типа, две из которых зависят от параметра, и восемь алгебр второго типа, одна из которых зависит от параметра. Естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры Ли были классифицированы в [3]. Здесь существует шесть семейств, два из которых разложимые, то есть разлагаются в прямую сумму идеалов, а также существуют некоторые частные случаи, которые появляются только в малых размерностях.

Определение 1. Алгебра Лейбница L называется квазифилиформной, если $L^{n-2} \neq \{0\}$ и $L^{n-1} = \{0\}$, где $n = \dim L$.

Теорема 1 [2]. Если L — естественным образом градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница, то она изоморфна одной алгебре неизоморфных семейств

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2, & [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \quad [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = -e_4 + \beta e_2, & [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, \\ [e_3, e_3] = \gamma e_2, & [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i \alpha e_n, & 3 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ является базисом алгебры, и в алгебре $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ если n нечётное, то $\alpha \in \{0,1\}$, а если n чётное, то $\alpha = 0$.

Следующая теорема описывает максимальные размерности дополняющих пространств до $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Предложение 1. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой является естественным образом градуированной квазифилиформной нелиевой алгеброй Лейбница. Тогда максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу не более двух.

Мы даем описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ такими, что размерность дополняющих подпространств максимальна.

Теорема 2. Не существует разрешимой алгебры Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$, у которой максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна единице.

Теорема 3. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна двум. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$R^1_{n+2}(0,\beta,0):$
$$\begin{cases} [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n-2, \quad [e_n,x]=e_n, \quad [x,e_1]=-e_1, \quad [x,e_n]=\beta e_n,\\ [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & [e_n,y]=e_n, \quad [y,e_{n-1}]=\beta e_{n-1}, \quad [y,e_n]=\beta e_n, \quad \beta\in\{-1,0\},\end{cases}$$
$R^2_{n+2}(0,1,1):$
$$\begin{cases} [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_2,x]=2e_2-2e_n, \quad [e_i,x]=ie_i, \quad 3\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1+e_{n-1}, & [e_1,y]=e_{n-1}, \quad [e_2,y]=2e_n, \quad [e_{n-1},y]=e_{n-1},\\ [e_n,y]=2e_n, & [y,e_1]=-e_{n-1}, \quad [y,e_{n-1}]=-e_{n-1},\end{cases}$$
$R^3_{n+2}(1,0,0):$
$$\begin{cases} [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_2,x]=e_2-e_n, \quad [e_i,x]=(i-1)e_i, \quad [e_n,x]=2e_n,\\ [x,e_1]=-e_1+e_{n-1}, & [e_1,y]=e_{n-1}, \quad [e_2,y]=e_2+e_n, \quad [e_i,y]=e_i,\\ [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & 3\le i\le n-2,\end{cases}$$

где учтено, что каждая разрешимая алгебра имеет свои умножения нильрадикала, а остальные произведения равны нулю.

Теорема 4. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна единице. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$H^1_{n+1}(0,0,1),\ H^2_{n+1}(1,2,0),\ H^3_{n+1}(1,0,\gamma),\ H^4_{n+1}(1,-2,1),\ H^5_{n+1}(1,4,2).$$

Приведём классификацию разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и двумерным дополняющим векторным подпространством к нильрадикалу.

Теорема 5. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна двум. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$H^1_{n+2}(0,0,0),\ H^2_{n+2}(0,1,0),\ H^3_{n+2}(0,2,1),\ H^4_{n+2}(1,0,0),\ H^5_{n+2}(1,1,0),\ H^6_{n+2}(1,2,1).$$

Заключение. Таким образом, из вышеизложенного и полученных результатов видно, что классификация разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами $\mathcal{L}(1,-1,0)$, $\mathcal{L}(1,0,0)$, $\mathcal{G}(1,1,0)$, $\mathcal{G}(1,2,1)$, у которых размерность дополняющего пространства равна единице, остаётся открытой проблемой. Для других алгебр проблема была решена.

Список литературы

[1] D.W. Barnes. On Levi's theorem for Leibniz algebras. Bull. Aust. Math. Soc. **86** (2012), no. 2, 184–185.

[2] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. **44** (2009), no. 5, 527–539.

[3] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán. Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. J. Algebra **256** (2002), no. 1, 221–228.

Локальное дифференцирование естественно градуированных квазифилиформных алгебр Лейбница

Ж.К. Адашев, Б.Б. Юсупов

Институт математики им. В.И. Романовского при АН РУз, Ташкент, Узбекистан

`adashevjq@mail.ru`, `baxtiyor_yusupov_93@mail.ru`

В последние годы неассоциативные аналоги классических конструкций вызывают интерес в связи с их приложениями во многих областях математики и физики. Понятия локального и 2-локального дифференцирования также становятся популярными для некоторых неассоциативных алгебр, таких, как алгебры Ли и Лейбница.