$$H^1_{n+1}(0,0,1),\ H^2_{n+1}(1,2,0),\ H^3_{n+1}(1,0,\gamma),\ H^4_{n+1}(1,-2,1),\ H^5_{n+1}(1,4,2).$$

Приведём классификацию разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и двумерным дополняющим векторным подпространством к нильрадикалу.

Теорема 5. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ и максимальная размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна двум. Тогда R изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$H^1_{n+2}(0,0,0),\ H^2_{n+2}(0,1,0),\ H^3_{n+2}(0,2,1),\ H^4_{n+2}(1,0,0),\ H^5_{n+2}(1,1,0),\ H^6_{n+2}(1,2,1).$$

Заключение. Таким образом, из вышеизложенного и полученных результатов видно, что классификация разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами $\mathcal{L}(1,-1,0)$, $\mathcal{L}(1,0,0)$, $\mathcal{G}(1,1,0)$, $\mathcal{G}(1,2,1)$, у которых размерность дополняющего пространства равна единице, остаётся открытой проблемой. Для других алгебр проблема была решена.

Список литературы

[1] D.W. Barnes. On Levi's theorem for Leibniz algebras. Bull. Aust. Math. Soc. **86** (2012), no. 2, 184–185.

[2] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. **44** (2009), no. 5, 527–539.

[3] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán. Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. J. Algebra **256** (2002), no. 1, 221–228.

Локальное дифференцирование естественно градуированных квазифилиформных алгебр Лейбница

Ж.К. Адашев, Б.Б. Юсупов

Институт математики им. В.И. Романовского при АН РУз, Ташкент, Узбекистан

`adashevjq@mail.ru`, `baxtiyor_yusupov_93@mail.ru`

В последние годы неассоциативные аналоги классических конструкций вызывают интерес в связи с их приложениями во многих областях математики и физики. Понятия локального и 2-локального дифференцирования также становятся популярными для некоторых неассоциативных алгебр, таких, как алгебры Ли и Лейбница.

Понятия локальных дифференцирований были введены в 1990 г. Р.В. Кадисоном [11] и Д.Р. Ларсоном, А.Р. Сууром [12]. Позже, в 1997 году, П. Щемрл ввел понятия 2-локальных дифференцирований и 2-локальных автоморфизмов на алгебрах [10].

Основные проблемы, связанные с этими понятиями, состоят в том, чтобы найти условия, при которых все локальные (2-локальные) дифференцирования становятся (глобальными) дифференцированиями, и представить примеры алгебр с локальными (2-локальными) дифференцированиями, которые не являются дифференцированиями.

Исследование локальных дифференцирований на алгебрах Ли было начато в статье [1]. Ш.А. Аюпов и К.К. Кудайбергенов доказали, что любое локальное дифференцирование на полупростых алгебрах Ли является дифференцированием, и привели примеры нильпотентных конечномерных алгебр Ли с локальными дифференцированиями, не являющимися дифференцированиями. В [4] исследуются локальные дифференцирования разрешимых алгебр Ли и показано, что в классе разрешимых алгебр Ли существуют алгебры, допускающие локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями, а также алгебры, для которых каждое локальное дифференцирование является дифференцированием. Более того, доказано, что всякое локальное дифференцирование на конечномерной разрешимой алгебре Ли с модельным нильрадикалом и максимальной размерностью дополнительного пространства является дифференцированием. Ш.А. Аюпов, А.Х. Худойбердиев и Б.Б. Юсупов доказали аналогичные результаты о локальных дифференцированиях на разрешимых алгебрах Лейбница в своей недавней статье [5]. В [6] автор доказал, что любое локальное дифференцирование на разрешимых алгебрах Лейбница, нильрадикал которых является квазифилиформной алгеброй Лейбница максимальной длины с максимальной размерностью дополнительного пространства к нильрадикалу, является дифференцированием. Кроме того, исследуется аналогичная проблема, касающаяся 2-локальных дифференцирований таких алгебр.

В [2] исследуются локальные дифференцирования и автоморфизмы комплексных конечномерных простых алгебр Лейбница, и доказывается, что все локальные дифференцирования на конечномерных комплексных простых алгебрах Лейбница являются автоматически дифференцированными, и показано, что филиформные алгебры Лейбница допускают локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями. Результаты статьи [3] показали, что p -филиформные алгебры Лейбница, как правило, допускают локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.

В данной статье мы описываем локальные дифференцирования квазифилиформной алгебры Лейбница и показываем существование локального дифференцирования, которое не является дифференцированием.

Определение 1. Векторное пространство с билинейной скобкой $(L, [\cdot,\cdot])$ называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - \big[[x,z],y\big].$$

Для данной алгебры Лейбница $(L, [\cdot,\cdot])$ последовательность двусторонние идеалы рекурсивно определяются следующим образом:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1.$$

Эта последовательность называется нижним центральным рядом L.

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется нильпотентной, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $L^n = \{0\}$.

Легко видеть, что сумма двух нильпотентных идеалов нильпотентна. Следовательно, максимальный нильпотентный идеал существует всегда. Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница называется нильрадикалом алгебры.

Определение 3. Линейное отображение $d \colon L \to L$ алгебры Лейбница $(L, [\cdot,\cdot])$ называется дифференцированием, если для всех $x, y \in L$ выполняется условие:

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]\,. \tag{1}$$

Множество всех дифференцирований L обозначается $Der(L)$, оно является алгеброй Ли относительно коммутатора.

Для данного элемента x алгебры Лейбница L оператор правого умножения $\mathcal{R}_x \colon L \to L$, определенный как $\mathcal{R}_x(y) = [y, x], y \in L$, является дифференцированием. Фактически, алгебры Лейбница характеризуются этим свойством относительно операторов правого умножения. Такие дифференцирования называются внутренними.

Определение 4. Линейный оператор Δ называется локальным дифференцированием, если для любого $x \in \mathcal{L}$, существует дифференцирование $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (в зависимости от x) такой, что $\Delta(x) = D_x(x)$.

Ниже мы определим понятие квазифилиформной алгебры Лейбница.

Определение 5. Алгебра Лейбница L называется квазифилиформной, если $L^{n-2} \neq \{0\}$ и $L^{n-1} = \{0\}$, где $n = \dim L$.

Для n-мерной нильпотентной алгебры Лейбница L такой, что $L^{s-1} \neq \{0\}$ и $L^s = \{0\}$, положим $L_i = L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$ и $gr(L) = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_{s-1}$. Благодаря $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ мы получаем градуированную алгебру $gr(L)$. Если $gr(L)$ и L изоморфны, $gr(L) \cong L$, мы говорим, что L *естественно градуирован*.

Пусть x — нильпотентный элемент множества $L \setminus L^2$. Для нильпотентного оператора правого умножения $\mathcal{R}_x$ определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, который состоит из размерностей жордановых блоков оператора $\mathcal{R}_x$. На множестве таких последовательностей рассмотрим лексикографический порядок, то есть $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \leq C(y) = (m_1, m_2, \ldots, m_t) \Leftrightarrow$ существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $n_j = m_j$ для любого $j < i$ и $n_i < m_i$.

Определение 6. Последовательность $C(L) = \max\limits_{x \in L \setminus L^2} C(x)$ называется характеристической последовательностью алгебры L.

Пусть L — n-мерная естественно градуированная квазифилиформная нелиевая алгебра Лейбница, имеющая характеристическую последовательность $(n-2, 1, 1)$ или $(n-2, 2)$. Первый случай (случай 2-филиформ) изучался в [9], а второй — в [8]. В [3] уже доказано, что p-филиформные алгебры Лейбница, как правило, допускают локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями.

Определение 7. Квазифилиформная нелиевая алгебра Лейбница L называется алгеброй типа I (соотв., типа II), если существует элемент $x \in L \setminus L^2$ такой, что оператор R_x имеет вид $\begin{pmatrix} J_{n-2} & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ (соотв., $\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_{n-2} \end{pmatrix}$).

В следующей теореме, полученной в [8], приведена классификация естественно градуированных квазифилиформных алгебр Лейбница.

Теорема 1. Произвольная n-мерная естественно градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница типа I изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр семейств:

$$\mathcal{L}_n^{1,\beta}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\le i\le n-3\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n,\ \beta\in\mathbb{C}\end{cases}\qquad \mathcal{L}_n^{2,\beta}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\le i\le n-3\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n,\ \beta\in\{0,1\}\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n\end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{3,\beta}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\le i\le n-3\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+e_2,\\ [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n,\ \beta\in\{-1,0,1\}\end{cases}\qquad \mathcal{L}_n^{4,\gamma}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\le i\le n-3\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+e_2,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n,\ \gamma\neq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{5,\beta,\gamma}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\le i\le n-3\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+e_2,\\ [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n,\ (\beta,\gamma)=(1,1)\ or\ (2,4)\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n,\end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ – базис алгебры.

Теорема 2. Произвольная n-мерная естественно градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница типа II изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных семейств алгебр: n чётное

$$\mathcal{L}_n^{1}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\end{cases}\qquad \mathcal{L}_n^{2}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=e_2-e_4,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 4\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{3}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=e_2,\end{cases}\qquad \mathcal{L}_n^{4}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_1,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=2e_2-e_4,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 4\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=e_2,\end{cases}$$

n нечётное, $\mathcal{L}_n^1,\mathcal{L}_n^2,\mathcal{L}_n^3,\mathcal{L}_n^4,$

$$\mathcal{L}_n^{5}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^ie_n,\ 3\le i\le n-1,\end{cases}\qquad \mathcal{L}_n^{6,\beta}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=\beta e_2-e_4,\ \beta\in\{1,2\},\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 4\le i\le n-1,\\ [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^ie_n,\ 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$\mathcal{L}_n^{7,\gamma}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=\gamma e_2,\ \gamma\neq 0,\\ [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^ie_n,\ 3\le i\le n-1,\end{cases}\qquad \mathcal{L}_n^{8,\beta,\gamma}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=\beta e_2-e_4,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1},\ 4\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=\gamma e_2,\ (\beta,\gamma)=(-2,1),(2,1)\text{ или }(4,2),\\ [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^ie_n,\ 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ является базисом алгебры.

Изучение естественно градуированной квазифилиформной алгебры Лейбница соответствующего типа из теорем 1 и 2 можно упростить следующим образом (см. [7]).

Предложение 1. Пусть L — естественно градуированная квазифилиформная алгебра Лейбница, тогда она изоморфна одной из алгебр следующих неизоморфных семейств

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+\alpha e_2, & [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n,\quad [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n,\end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\leq i\leq n-1,\\ [e_1,e_3]=-e_4+\beta e_2, & [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 4\leq i\leq n-1,\\ [e_3,e_3]=\gamma e_2, & [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^i\alpha e_n, & 3\leq i\leq n-1,\end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ – базис алгебры; более того, в алгебре $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ если n нечетно, то $\alpha\in\{0,1\}$, если n четно, то $\alpha=0$.

Теперь мы изучаем локальные дифференцирования на алгебрах $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Теорема 3. Алгебры $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ допускают локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями.

Список литературы

[1] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local derivation on finite dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications **493** (2016), 381–398.

[2] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov B. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **43** (2020), 2199-–2234.

[3] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.B. Yusupov. Local and 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras. Journal of Mathematical Sciences **245** (2020), no. 3, 359–367.

[4] Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev. Local derivations on solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra **69** (2021), 1286–1301.

[5] Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.B. Yusupov B. Local and 2-local derivations of Solvable Leibniz algebras. International Journal of Algebra and Computation **30** (2020), no. 6, 1185–1197.

[6] Sh.A. Ayupov, B.B. Yusupov. Local and 2-local derivation on solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length. Karakalpak Scientific Journal **3** (2020), no. 1, 4–15.

[7] L.M. Camacho, E.M. Cañete, J.R. Gómez, B.A. Omirov. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length. Siberian Mathematical Journal **52** (2011), no. 5, 840–853.

[8] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. Journal of Symbolic Computation **44** (2010), no. 5, 527–539.
[9] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras. Communications in Algebra **38** (2010), no. 10, 3671–3685.
[10] P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), 2677–2680.
[11] R.V. Kadison. Local derivations. Journal of Algebra **130** (1990), 494–509.
[12] D.R. Larson, A.R. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **51** (1990), no. 2, 187–194.

$3j$-символы для представлений алгебры $\mathfrak{gl}_n$

Д.В. Артамонов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonov.dmitri@gmail.com

Пусть даны неприводимые конечномерные представления V, W, U алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Предположим, что в них выбраны базисы Гельфанда-Цетлина $\{v_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{u_\gamma\}$. Тогда $3j$-символом называется набор чисел

$$\begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u\gamma \end{pmatrix}^s \tag{1}$$

таких, что величина

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u\gamma \end{pmatrix}^s v_\alpha \otimes w_\beta \otimes u\gamma$$

является $\mathfrak{gl}_n$-инвариантной. При этом $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами образуют линейное пространство. Индекс s индексирует базисные $3j$-символы с одинаковыми внутренними индексами.

Легко понять, что задача вычисления $3j$-символов в сущности эквивалентна задаче нахождения коэффициентов Клебша–Гордана, осуществляющих явное разложение тензорного произведения двух неприводимых представлений.

Последняя задача активно обсуждалась в работах, прежде всего связанных с приложениями в квантовой механики. До настоящего момента сложился такой взгляд на проблему явного нахождения коэффициентов Клебша–Гордана: эта задача легко решается для $n = 2$. Она решается явно, но очень