Комбинаторное описание многочленов Шуберта для групп Вейля типов B, C и D

Е.Ю. Смирнов
НИУ ВШЭ, Независимый Московский университет, Москва, Россия
esmirnov@hse.ru

Классический результат А.Бореля гласит, что кольцо когомологий многообразия полных флагов $\mathrm{GL}(n)/B$ изоморфно фактору кольца многочленов от n переменных по идеалу, порождённому симметрическими многочленами без свободного члена. С другой стороны, в нем существует замечательный базис из классов Шуберта — классов замыканий орбит борелевской подгруппы. В 1970–80-х гг. И.Н. Бернштейн, И.М. Гельфанд и С.И. Гельфанд [1] и независимо А. Ласку и М.-П. Шютценберже [4] выписали набор явных полиномиальных представителей классов Шуберта, которые называются многочленами Шуберта и обладают рядом замечательных свойств. Они получаются комбинаторно как производящие функции некоторых диаграмм (конфигураций псевдолиний), называемых *pipe dreams*; отсюда, в частности, следует положительность их коэффициентов.

Ту же задачу можно рассмотреть и для многообразий флагов G/B других классических групп: $\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{Sp}(2n)$. Многочлены Шуберта для классических групп были определены С. Билли и М. Хайманом [2] в 1995 году; в 2011 г. Т. Икеда, Л. Михалча и Х. Нарусэ [3] получили их T-эквивариантные аналоги, т.е. представители классов Шуберта в кольце T-эквивариантных когомологий многообразия G/B. В докладе будет рассказано об аналогах pipe dreams для этих случаев, которые возникли в нашей совместной работе с А.А. Тутубалиной [5]. Если позволит время, я также упомяну связь pipe dreams с многогранниками Гельфанда–Цетлина.

Работа выполнена при поддержке фонда «Базис» и РФФИ, проект 20–01–00091–а.

Список литературы

[1] И.Н. Бернштейн, И.М. Гельфанд, С.И. Гельфанд. Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P. УМН **28** (1973), no. 3(171), 3–26.
[2] S. Billey, M. Haiman. Schubert polynomials for the classical groups. Journal of the American Mathematical Society **8** (1995), no. 2, 443–482.
[3] T. Ikeda, L.C. Mihalcea, H. Naruse. Double Schubert polynomials for the classical groups. Advances in Mathematics **226** (2011), no. 1, 840–886.

[4] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger. Polynômes de Schubert. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 13, 447–450.
[5] E. Smirnov, A. Tutubalina. Pipe dreams for Schubert polynomials of the classical groups. Preprint, 36 p., arXiv: `math.CO/2009.14120` (2020).

Короткие SL_2-структуры на простых алгебрах Ли

Р.О. Стасенко
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
`theromestasenko@yandex.ru`

Известна классическая конструкция Титса–Кантора–Кёхера, позволяющая по простой йордановой алгебре J построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, имеющую вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J).$$

Теорема Титса–Кантора–Кёхера утверждает, что между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли, снабжёнными вышеуказанным разложением, существует взаимно однозначное соответствие.

Конструкцию Титса–Кантора–Кёхера можно интерпретировать как линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое разлагается на неприводимые представления размерностей 1 и 3. Естественным обобщением является следующее понятие. Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi\colon S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем *короткой*, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. При этом изотипное разложение представления Φ будет иметь вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\right) \oplus \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\right).$$

Конструкция Титса–Кантора–Кёхера получается при $J_1 = 0$. Доклад будет посвящён случаю $J_1 \neq 0$.

Аналогично теореме Титса–Кантора–Кёхера, будет установлено взаимно однозначное соответствие между простыми алгебрам Ли с короткой SL_2-структурой с $J_1 \neq 0$ и так называемыми простыми симплектическими тройками Ли–Йордана $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$, где J_1 — симплектическое пространство, $\mathfrak{g}_0$ —