Когомологии Галуа связных редуктивных групп над $\mathbb{R}$

Д.А. Тимашёв
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
timashev@mccme.ru

Когомологии Галуа служат универсальным инструментом для изучения алгебраических групп и их действий, определённых над алгебраически незамкнутым полем $\Bbbk$. Когомологии Галуа применяются в диофантовых задачах теории алгебраических групп, в классификации $\Bbbk$-форм различных объектов, таких, как конечномерные алгебры или квазипроективные многообразия, в описании $G(\Bbbk)$-орбит на множестве $\Bbbk$-точек $X(\Bbbk)$ алгебраического многообразия X с действием алгебраической группы G, определённым над $\Bbbk$, и т.п. Особый интерес представляют когомологии Галуа алгебраических групп над числовыми полями. Их вычисление по существу сводится к когомологиям Галуа над $\Bbbk = \mathbb{R}$ [4, Cor. 4.5], [2, Thm. 5.11].

Доклад посвящён вычислению (первых, неабелевых) когомологий Галуа связных линейных алгебраических групп над $\mathbb{R}$. Разложение Леви $G = G_{\mathrm{uni}} \rtimes G_{\mathrm{red}}$ линейной алгебраической группы G вместе с тривиальностью множества когомологий $H^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{uni}})$ сводит задачу к случаю редуктивной группы.

Пусть теперь G — связная редуктивная группа, определённая над $\mathbb{R}$. Выберем максимальный анизотропный тор $T_0 \subseteq G$ и рассмотрим единственный максимальный тор $T = Z_G(T_0)$, содержащий T_0. Положим

$$N_0 = \{n \in N_G(T_0) \mid n\bar{n}^{-1} \in T_0\}$$

(где черта обозначает операцию комплексного сопряжения на G). Группа N_0 действует на T_0 *скрученными сопряжениями*: $t \overset{n}{\mapsto} nt\bar{n}^{-1}$. Из основного результата работы [1] несложно вывести, что естественное отображение $H^1(\mathbb{R}, T) \to H^1(\mathbb{R}, G)$ задаёт биекцию

$$(T_0)_2/\widehat{W}_0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, G),$$

где $(T_0)_2$ — множество элементов порядка ≤ 2 в T_0, а $\widehat{W}_0$ — конечная факторгруппа группы N_0, эффективно действующая на T_0.

«Логарифмирование» этого действия приводит к кристаллографической группе $\widetilde{W}_0 = X_0^\vee \rtimes W_0$ движений евклидова пространства $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R}) = \operatorname{Lie} T_0(\mathbb{R})$, где $X_0^\vee$ — проекция решётки кохарактеров $X^\vee$ тора T в $\mathfrak{t}_0$, действующая на $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$ параллельными переносами, а группа $W_0 = N_0/(N_0 \cap T)$ действует ортогональными линейными преобразованиями. Таким образом, $T_0(\mathbb{R})/\widehat{W}_0$ отождествляется с $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})/\widetilde{W}_0$.

Рассмотрим разложение в почти прямое произведение $G = G^{\mathrm{ss}} \cdot S$, где G^{ss} — полупростая часть, а S — связный центр группы G. Решётка $X_0^\vee$ содержит подрешётку конечного индекса $Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee$, прямые слагаемые которой суть проекции решётки кокорней $Q^\vee$ группы G и решётки кохарактеров $\Lambda^\vee$ тора S в $\mathfrak{t}_0$, соответственно. Группа $\widetilde{W}_{\mathrm{r}} = Q_0^\vee \rtimes W_0$ порождена отражениями, и её фундаментальная область есть декартово произведение

$$\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R})$$

симплексов Δ_i, метрическая структура которых задаётся аффинными диаграммами Дынкина $\mathbb{R}$-простых факторов группы G^{ss}, и евклидова пространства $\mathfrak{s}_0(\mathbb{R}) = \mathfrak{t}_0(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Lie} S$.

Мы описываем конечное подмножество

$$\mathcal{K}(G) \subset \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R})/\Lambda_0^\vee,$$

$\widetilde{W}_0$-орбиты точек которого соответствуют $\widehat{W}_0$-орбитам в $(T_0)_2$. Точки множества $\mathcal{K}(G)$ параметризуются неотрицательными целочисленными отметками при вершинах вышеупомянутых аффинных диаграмм Дынкина и элементами некоторой конечной подгруппы компактного тора $\mathfrak{s}_0(\mathbb{R})/\Lambda_0^\vee$, удовлетворяющими условиям согласованности. В итоге мы получаем эффективное комбинаторное описание когомологий Галуа.

Теорема. $H^1(\mathbb{R}, G) \simeq \mathcal{K}(G)/F_0$, где $F_0 = X_0^\vee/(Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee)$ — конечная абелева группа с явно заданным действием на множестве $\mathcal{K}(G)$.

Доклад основан на совместной работе с М.В. Боровым, выполненной при финансовой поддержке РФФИ по гранту 20–01–00091 и Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2019–1621. Основные результаты для полупростого случая опубликованы в [3].

Список литературы

[1] М.В. Боровой. Когомологии Галуа вещественных редуктивных групп и вещественные формы простых алгебр Ли. Функц. анализ и его прил. **22** (1988), no. 2, 63–64.

[2] M. Borovoi. Abelian Galois cohomology of reductive groups. Mem. Amer. Math. Soc. **132**, no. 626, 1998.

[3] M. Borovoi, D.A. Timashev. Galois cohomology of semisimple groups via Kac labelings. Transform. Groups, 2021, published online, DOI: 10.1007/s00031-021-09646-z.
[4] J.-J. Sansuc. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12–80.

Положительные грассманианы, грассмановы ожерелья и колчанные грассманианы для циклических колчанов

Е.Б. Фейгин
НИУ ВШЭ, Сколтех, Москва, Россия
evgfeig@gmail.com

Положительные грассманианы $\mathrm{Gr}(k,n)_+$ над вещественными числами были определены и изучены А. Постниковым. В частности, им было построено клеточное разбиение $\mathrm{Gr}(k,n)_+$ и определён ряд комбинаторных объектов, которые параметризуют клетки. Одним из таких объектов являются грассмановы ожерелья — наборы подмножеств конечного множества, удовлетворяющие специальным условиям. Для каждой пары натуральных чисел $k < n$ мы строим комплексное алгебраическое многообразие $X(k,n)$, клетки которого также параметризуются грассмановыми ожерельями. Эти многообразия являются колчанными грассманианами для циклических колчанов. Мы изучаем алгебро-геометрические и комбинаторные свойства многообразий $X(k,n)$. В частности, мы описываем неприводимые компоненты $X(k,n)$ и устанавливаем связь между полиномами Пуанкаре $\mathrm{Gr}(k,n)_+$ и $X(k,n)$. Доклад основан на совместной работе с Мартиной Ланини и Александром Пютцем.

О феномене продолжения Гартогса в сферических многообразиях

С.В. Феклистов
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
sergeyfe2017@yandex.ru

Доклад посвящён обобщению классической теоремы Гартогса о стирании компактных особенностей [3] на случай некомпактных комплексных сферических многообразий.

Пусть $(X, \mathcal{O})$ — связное приведённое комплексное аналитическое пространство.

Определение. Будем говорить, что X допускает феномен Гартогса, если для любой области $D \subset X$ и любого компактного множества $K \subset D$ такого,